Министерство образования Российской Федерации

Национальный Фонд подготовки кадров

Элективные курсы в профильном обучении

Образовательная область «Математика»

Москва
2004

УДК 000.000.000
ББК 00.0000
Э00

Общая редакция сборника осуществлена *А.Г. Каспржаком*

Э00 Элективные курсы в профильном обучении: Образовательная область «Математика»/Министерство образования РФ — Национальный фонд подготовки кадров. — М.: Вита-Пресс, 2004. — 96 с.— ISBN 5-7755-

УДК 000.000.000
ББК 00.0000

Учебное издание

**Серия «Элективные курсы в профильном обучении»
Образовательная область «Математика»**

Оригинал-макет выполнен издательством «Вита-Пресс»
Изд. лицензия ИД № 02033 от 13.06.00
Подписано в печать 05.03.04
Формат 60Х90 1/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 6. Уч.-изд. л. 6. Тираж Заказ

Издательство «Вита-Пресс», 107140, Москва, ул. Гаврикова, 7/9
Тел. 261-8337, 261-3078, 265-7087, 265-7157
e-mail: vitaprss@garnet.ru
Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в

ISBN 5-7755-

Настоящий сборник издается Национальным фондом подготовки кадров по итогам Конкурса учебных материалов для обеспечения занятий по вариативному компоненту Базисного учебного плана в старшей профильной школе (элективные курсы).

Сборник состоит из семи брошюр. В первой представлены нормативные документы Министерства образования РФ, определяющие организацию и содержание элективных курсов в составе профильного обучения, а также рекомендации педагогам и руководителям школ, которые начали осуществлять это обучение. Кроме того, там содержатся материалы к двум курсам, признанным Экспертным советом Конкурса лучшими, и приведен перечень издательств, в которых будут издаваться учебно-методические комплекты по всем представленным в сборнике программам.

Содержание других брошюр — программы элективных курсов по образовательным областям «Естествознание», «Информатика», **«Математика»**, «Обществознание», «Технология» и «Филология». Каждая из этих брошюр начинается со статьи, в которой эксперты — организаторы Конкурса поясняют специфику работы учителя, взявшегося за проведение занятий по элективным курсам, принадлежащим той или иной образовательной области.

Мы надеемся, что представленные в сборнике материалы помогут не только работникам школ, принимающим участие в эксперименте по профильному обучению, но и авторам учебно-методических комплектов элективных курсов при подготовке этих комплектов к изданию с учетом рекомендаций учителей-практиков.

Для работников управлений образования различных уровней, а также системы переподготовки кадров мы включили в первую часть сборника документы, определившие порядок проведения и содержание Конкурса. Надеемся, что эти документы могут помочь при организации и проведении аналогичных конкурсов в субъектах Федерации, городах, образовательных учреждениях.

Экспертный комитет Конкурса

Содержание

Элективные курсы образовательной области «Математика» ... 5

ПОДРОБНЫЕ ПРОГРАММЫ ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСОВ ... 21

Замечательные неравенства, их обоснование и применение ... 22

Мир, математика, математики (историческая реконструкция элементарной алгебры и математического анализа) ... 44

Математика в архитектуре ... 60

КРАТКИЕ ПРОГРАММЫ ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСОВ ... 77

Математический язык через призму естественного языка или язык математики ... 78

Алгебра плюс: Элементарная алгебра с точки зрения высшей математики ... 81

Обоснования в математике (От Евклида до компьютера) ... 85

Геометрическое моделирование окружающего мира ... 89

Математические основы информатики ... 93

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ «МАТЕМАТИКА»

Л.И.Звавич

Среди школьных предметов математика занимает совершенно особое место. Впрочем, любой учитель утверждает то же самое о преподаваемом им предмете. И это совершенно справедливо. Но в настоящей части сборника представлены программы элективных курсов образовательной области «Математика», и речь, естественно, пойдет именно об этом предмете.

Обращаем ваше внимание на то, что сегодня мы не будем обсуждать вопрос специфики математики как науки (эта тема модна и подчас подменяет собой все остальные), речь пойдет об особенностях математики как учебного предмета. В середине прошлого века в старших классах отечественной школы много внимания и, как следствие, учебного времени уделялось математике. Школьный учебный план содержал три предмета, относящихся к образовательной области «Математика»: алгебра, тригонометрия и геометрия. Изменения учебного плана, произошедшие в ходе реформы 1960-х, привели к тому, что тригонометрия была интегрирована с алгеброй и частично геометрией. Эта ситуация сохранилась до наших дней. В старших классах школы изучаются два предмета, составляющих образовательную область «Математика», — алгебра и основы математического анализа и геометрия. Однако сейчас наметилась тенденция (с точки зрения автора этой статьи — ошибочная) наличия в учебном плане школы одного предмета — математика. Можно предположить, что в создаваемой профильной школе, скорее всего, в классах естественно-научного и математического профиля, сохранится раздельное обучение алгебре и геометрии. А вот в классах других профилей в учебном плане, вероятнее всего, будет присутствовать интегративный курс математики.

Мы не скажем ничего нового, отметив, что снижение количества часов на математику (как, впрочем, и на многие другие предметы) без изменения целей обучения и задач, которые на математическом материале следует решить, крайне опасно. Именно снижение числа часов (особенно в младших классах) без изменения целей и приводит к перегрузке учащихся старших классов. Следовательно, определяющим остается вопрос о целях и задачах школьной математики. Наглядная иллюстрация этой проблемы — процесс создания образовательного стандарта по математике. Полемика по вопросу разрабатываемого стандарта идет куда более жесткая, чем по многим другим учебным предметам. На наш взгляд, это вызвано следующими причинами:

• Среди математиков, разрабатывающих программы, учебные пособия и, как следствие, участвующих в создании образовательного стандарта, присутствуют представители нескольких школ. Прийти к компромиссу между собой они не могут, и документы, которые созданы каждой из групп, всегда будут носить вкусовой характер, зависеть от взглядов и интересов той группы лиц, которая их готовит.

• Как уже отмечалось, трудности в создании стандарта связаны еще и с несоответствием количества отводимых на математику часов тем требованиям, которые предъявляются к знаниям и умениям, выработанным на уроках математики, другими школьными предметами, использующими аппарат этой науки, а также системой итоговой аттестации и приема в вузы.

• Объем содержания. Математика (как и русский язык) — предмет, изучающийся с первого по выпускной класс; объем содержательных единиц, которыми должен оперировать старшеклассник по математике, чрезвычайно велик. Следовательно, велик и объем накопившихся у учащихся за годы обучения пробелов. Многие из этих пробелов образуются, как мы говорили, еще в начальной школе. Устранение этих пробелов, к сожалению, становится чаще всего основной задачей учителя старших классов.

• Специфика преподавания математики в старших классах во многом определяется еще и тем, что экзамен по математике (в данное время по алгебре и началам анализа) является обязательным для всех школьников. В настоящее время этот экзамен в значительном числе школ России проводится в виде Единого государственного экзамена, и, скорее всего, уже к 2005/2006 г. эта форма аттестации возобладает над всеми другими. Единый государственный экзамен по математике — процедура серьезная, требующая специальной подготовки. Преподаватель математики отчетливо сознает, что большинству его питомцев нужна хорошая оценка не только по «школьной составляющей» ЕГЭ, но и по всем его компонентам.

• Математику, в отличие от других предметов, сдают в большинстве высших учебных заведений независимо от того, какие это учебные заведения (математические, естественно-научные, технические, экономические, военные, связанные с математической лингвистикой, и т.д.). В общем легче по пальцам перечислить вузы, где не будет требоваться представления балла по математике, полученного на ЕГЭ, чем те, где он требуется. Если раньше учитель математики в школе мог еще как-то в определенном смысле отстраниться от вопросов сдачи его выпускниками вступительных экзаменов в вуз и сосредоточиться только на выпускном экзамене в школе, то с введением ЕГЭ на учителя математики явно или неявно возлагается еще бóльшая ответственность.

Из всего вышеизложенного можно сделать вывод, что в профильной школе математика займет весьма важное место, учитель математики независимо от профиля будет, так или иначе, стремиться к увеличению числа учебных часов по своему предмету. Поэтому, как нам представляется, абсолютное большинство учителей математики будет заинтересовано в ведении элективных курсов.

С другой стороны, очень важен вопрос о том, какие это будут элективные курсы, как учителя распорядятся отведенным на этот элемент образовательной программы временем.

Можно прогнозировать, что очень многие преподаватели математики захотят, так или иначе, вольно или невольно, явно или неявно, использовать элективные курсы для закрепления содержания основной программы и/или прагматической подготовки (хорошо, если не натаскиванию) учащихся к ЕГЭ.

Отметим, что, на наш взгляд, практически в любом элективном курсе, конечно же, должна наличествовать (на самом деле так и есть) прагматическая составляющая, поскольку изучение любого раздела математики связано с глобальным ее знанием. С другой стороны, важно, в какой степени и как подана эта прагматическая составляющая.

На наш взгляд, интерес или «неинтерес» к математике за годы обучения, предшествующие профильному, в основном уже сформирован. Рассматривая причины интереса к математике у своих учеников, учителю не стоит путать интерес к ней как к средству поступления в высшее учебное заведение с интересом к ней как собственно учебному предмету, как к науке.

Одной из важных задач введения элективных курсов является именно развитие у учащихся интереса собственно к математике. Ученик должен чувствовать эстетическое удовлетворение от красиво решенной задачи, от установленной им возможности приложения математики к другим наукам. К этой цели стремятся авторы всех без исключения программ элективных курсов по математике, помещенных в данном сборнике.

Если в изучении предметов естественно-научного цикла очень важное место занимает эксперимент и именно в процессе эксперимента и обсуждения его организации и результатов формируются и развиваются интересы ученика к данному предмету, то в математике эквивалентом эксперимента является решение задач. Собственно весь курс математики может быть построен и, как правило, строится на решении различных по степени важности и трудности задач. Совершенно ясно, что любую теорему тоже можно и нужно рассматривать как задачу, ее доказательство — как решение этой задачи, а различные следствия из доказательства (использование доказанного в различных областях) — как приложения этой задачи.

Решение задач в таком широком толковании и использование результатов этого решения, в той или иной мере, содержатся во всех программах элективных курсов по математике, помещенных в данном сборнике.

Кого мы учим или кто и на какой элективный курс может и должен прийти

Отметим еще одну общую особенность элективных курсов. Элективный курс проводится для сравнительно небольшого числа учащихся, изъявивших желание его выбрать. При этом очевидно, что практически уровень учебных достижений учеников одного класса и одной школы весьма различен, исключений здесь нет (даже для элитных и «сверхэлитарных» школ). Поэтому одной из важных особенностей элективных курсов является их ориентация на различные группы учащихся. Остановимся на некоторой, весьма условной, конечно же, классификации учащихся будущей профильной школы с точки зрения математики.

Первую, естественно, весьма немногочисленную ***группу учеников*** составляют математические вундеркинды, учащиеся-звезды, победители олимпиад высокого уровня. Представители этой группы овладевают школьной программой «играючи». Для них вообще нет проблемы «преодоления» выпускного экзамена или ЕГЭ. Их математические аппетиты требуют все новой и новой пищи. Им интересно изучать то, «что в школе никто не изучает». В работе с этими учениками важно не навредить, не помешать. Большинство таких старшеклассников концентрируется в специфических учебных заведениях, подобных колмогоровскому интернату. Для работы с такими подростками мы предлагаем учителям математики использовать представленные в нашем сборнике программы:

• **«Алгебра плюс: Элементарная алгебра с точки зрения высшей математики».** Автор: *А.Н. Земляков,* канд. пед. наук.

• **«Мир, математика, математики (историческая реконструкция элементарной алгебры и математического анализа)».** Автор: *А.Н. Земляков,* канд. пед. наук.

• **«Геометрическое моделирование окружающего мира».** Авторы: *Е.А. Ермак*, канд.пед.наук, доцент кафедры математического анализа Псковского ГПИ; *И.А. Иванов*, канд.пед.наук, доцент кафедры общей математики Сочинского института информационных технологий и математики; *В.В. Орлов*, д-р пед.наук, профессор кафедры методики обучения математике РГПУ им. А.И. Герцена; *Н.С. Подходова*, д-р пед. наук, профессор кафедры методики обучения математике РГПУ им. А.И. Герцена.

• **«Обоснования в математике (От Евклида до компьютера)».** Авторы: *Е.А. Ермак,* канд. пед. наук и др.

• **«Замечательные неравенства, их обоснование и применение»** Автор: *С.А. Гомонов,* канд. физ.-мат. наук.

• **«Математические основы информатики».** Авторы: *Е.В. Андреева*, канд.физ.-мат.наук, *Л.Л. Босова*, канд.пед.наук, *И.Н. Фалина*, канд.пед.наук.

Ко второй группе отнесем учеников, которые в течение всех прежних лет постоянно и с увлечением изучали математику, участвовали в олимпиадах, занимались в кружках. Тех, у кого, по всей видимости, как в начальной школе, так и в среднем звене были добросовестные учителя, достаточно требовательные, с одной стороны, и поощряющие творческий подход и самостоятельность решения, с другой стороны. Классы, в которых они учились, были достаточно хорошо подготовлены по математике. То есть включали тех, из кого в идеале и должны состоять классы профильного обучения. Для них (учителей, учеников) мы могли бы посоветовать все вышеперечисленные программы.

Кроме того, они вполне могут выбрать элективный курс **«Математика в архитектуре».** Автор: *Н.Л. Стефанова* — д-р пед. наук, профессор, декан факультета математики РГПУ им. А.И. Герцена.

Третья группа. Старшеклассники, хорошо занимающиеся по математике на протяжении предыдущих лет обучения в силу врожденной старательности. Их учитель был чрезвычайно строг и развивал главным образом технику математических вычислений, а не свободу математического мышления. Решаемые в классе и задаваемые на дом задачи были весьма идеологически однообразны, отрабатывали технику, их трудность заключалась главным образом в громоздкости вычислений. Прошедшие такую «школу» ученики с первых шагов обучения в профильных классах затрудняются в решении «хитрых» задач, тех, решение которых требует не только знаний и умений, но и интуиции. Эти ученики очень долго готовят уроки, для них является катастрофой невыполнение домашнего задания, чрезвычайно болезненно реагируют на тройки и даже двойки, которые могут появиться в их дневниках на первых порах обучения. Практика показывает, что через некоторое время они либо развиваются, преодолевая «препятствие», и становятся лучшими, либо «опускают руки», признав себя неспособными к обучению в классах с углубленным изучением математики. Возможно, что первые полгода этим детям не стоит рекомендовать посещать какой-либо элективный курс вообще. Однако если уж они захотели бы выбрать какой-либо курс, то мы бы им посоветовали либо «Алгебра плюс», либо «Замечательные неравенства, их обоснование и примеры», а может быть, и «Математика в архитектуре».

К четвертой группе отнесем школьников, которым легко давалась математика. У них развита интуиция «от природы», они быстро чувствуют, что хочет от них преподаватель. Учитель, у которого они обучались, свои уроки вел как игру, недолго оставаясь на «нудных» вычислительных упражнениях, щедро ставил пятерки за оригинальные решения, поощрял решивших первыми и т.п. (доводя порой все это до крайности). У таких учащихся возникают прямо противоположные трудности по отношению к тем, о которых шла речь в предыдущем пункте. Их утомляют, раздражают встречающиеся громоздкие вычисления, пугают не получающиеся с ходу задачи и т.д. и т.п. Они тянут руки на уроках и на первых этапах обучения также получают пятерки, опередив своих товарищей; по-прежнему чрезвычайно быстро делают (или убеждают себя и окружающих, что делают) домашние задания. Эти учащиеся не засиживаются над изучением теории, невнимательно слушают ответы своих товарищей и объяснения учителя, особенно если чувствуют, что тут нельзя быстро получить пятерку. У таких старшеклассников, конечно же, возникают большие трудности в первый период обучения. Учитель должен проявить к ним определенную терпимость, так как среди них много талантливых подростков, просто не владеющих техникой и навыком систематической работы. Эти учащиеся, скорее всего, выберут сразу несколько элективных курсов, но могут быстро к ним охладеть и прекратить посещать занятия. Поэтому, возможно, и им первые полгода профильного обучения стоит обойтись «минимумом» элективных курсов (конечно же, такое решение должно «родиться» в голове ученика в результате переговоров). Затем, если первое полугодие прошло удачно, они смогут освоить любую из вышеперечисленных программ.

Пятую группу составляют ученики, которые были сильными в очень слабых классах; тех, кто учился у учителя, ставящего перед собой задачу в первую очередь обучить всех всему, подробно растолковать всем все, что он знает. Такие ученики за предыдущие годы обучения привыкли выслушивать порою скучные и ужасающие ответы своих соучеников, и им уже надоело даже смеяться над такими ответами. Они привыкли во время этих ответов разговаривать с товарищами, наблюдать за какими-то посторонними вещами, происходящими либо в классе или за окном... Им свойственна чрезвычайно завышенная самооценка (это не их вина, но беда). На первых порах они и объяснения учителя слушают урывками, им кажется все ясным, кажется, что основные идеи они подхватили на лету, а все остальное уже слушать не надо. Трудность работы с этими школьниками заключается в основном в том, что математика уже не дает им возможности, как раньше, самоутвердиться и почувствовать свою исключительность. Из-за постигших их на первых порах неудач (а они неизбежны) и желая рационализировать ситуацию, в которой они оказались, многие из таких учащихся начинают думать, что:

• либо изучаемый материал неинтересен;

• либо новый учитель плохо объясняет и специально запутывает простые вещи, да еще специально придирается к учащимся.

Работа с такими учащимися достаточно сложна. Они, эти ученики, могут оказаться как хороши, так и плохи на любом элективном курсе, но привлечь их к занятиям, безусловно, стоит. Правда, курсы лучше выбрать не очень сложные.

Следующая группа школьников состоит из подростков, которые пришли в профильный класс как в еще одну секцию, кружок. Просто в этот класс шло много учеников, и они пришли туда «за компанию». Математика их интересует постольку, поскольку они занимаются еще в музыкальной школе, спортивной секции или еще каком-либо кружке. Постепенно они могут начать не успевать все это делать одновременно, что становится серьезной проблемой. Они очень не хотят бросить обучение в музыкальной школе и т.п. Эти старшеклассники, скорее всего, не будут посещать никаких элективных курсов, и, возможно, им и не надо их активно предлагать. Элективными курсами для них как бы являются те внеурочные кружки и секции (в школе или вне ее), в которых они достигли уже весьма высоких результатов. Конечной целью таких учащихся совершенно необязательно являются профессиональные занятия спортом или музыкой. Поэтому они активно занимаются общешкольной профильной программой и, как правило, успешно поступают в вузы.

Заключительную группу учеников профильных классов могут составить откровенно слабые либо «натасканные на поступление» ученики, неспособные освоить профильную программу по математике вообще. Очевидно, что такие ученики будут. Вопрос выполнения ими учебного плана, составной частью которого являются элективные курсы, видимо, в каждом отдельном случае будет решаться индивидуально.

Несколько слов о составе учительского «цеха»

Любая из вышеописанных групп требует специфической работы учителя. Если эта работа правильно организована, то, как показывает практика, в большинстве случаев она приводит к успеху. Уже к началу второго года профильного обучения состав учащихся в большей степени уравнивается, причем значительно увеличивается слой хорошо подготовленных, интересующихся предметом учащихся. Так что, на наш взгляд, самое продуктивное время для элективных курсов — это второй год обучения в профильной школе.

Успешность профильного обучения и проведения элективных курсов, в частности, во многом зависит от личности и квалификации ведущего эти курсы учителя. Заметим, к слову, что не только учитель формирует ученика, но и ученики в большой степени формируют учителя. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся, на наш взгляд, группы учителей профильных классов.

а) Специалисты своего дела с большим опытом работы. Они хорошо умеют составлять, решать и объяснять математические задачи и теоретический материал, отыскивают подход к ученикам и хотят этот подход найти. Эти учителя, безусловно, сами сориентируются в том, какую из представленных программ им выбрать для обучения. Более того, они творчески подойдут к каждой программе, переработают ее «под себя и своих учащихся».

б) Сильные математики, в прошлом отличные студенты, выбравшие преподавание в углубленных классах по принципу нежелания работать в обычных классах. Их совершенно не интересует посильность обучения или ясность собственных объяснений. Массовые неудачи учащихся они объясняют отсутствием у них интереса или способностей. Мы посоветуем таким учителям по возможности изменить свой взгляд на методику своей работы. В противном случае они могут, выбрав наиболее трудные элективные курсы и «уговорив» учащихся их посещать, изменить саму идею элективных курсов.

в) Учителя, долго работавшие в обычных классах, хорошо владеющие методикой, но не всегда успешно справляющиеся с трудными математическими проблемами профильных классов. Многое они уже забыли, а многое никогда не знали. При правильной организации процесса переподготовки такие учителя очень скоро могут стать высококлассными специалистами, способными вести практически любые элективные курсы.

г) Учителя, совершенно случайно привлеченные к преподаванию в профильных классах (других не было). Такие учителя убеждены, что профильное обучение происходит главным образом за счет увеличения количества часов для решения стереотипных задач. Других же различий для них между математическим классом и базовым нет. Эти учителя могут, к сожалению, профанировать саму идею введения в учебный план элективных курсов. Весьма вероятно, что в журнал они будут писать то, «что положено», а делать.... По возможности таких учителей не следует привлекать к ведению элективных курсов, да и к работе в профильных классах вообще. Как, впрочем, и «непрофильных»...

Итак, выбирая элективный курс, учитель должен сто раз подумать, будет ли интересна и доступна данная программа ему и его ученикам.

Несколько соображений, отвечающих на вопросы ЗАЧЕМ, ЧТО и КАК надо преподавать на элективном курсе

Элективные курсы — дело для отечественной школы новое, опыта их проведения практически нет. Это означает, что авторы программ, представленных в сборнике, во многом исходили из своего личного опыта, который носит частный характер и потому не может быть прямо распространен.

Как уже говорилось выше, одной из основных целей обучения в профильных классах является развитие личности ребенка, распознавание и раскрытие его способностей. Было бы неверно считать, что важной целью обучения в математическом профиле является «выращивание» математиков. Очень немногие выпускники математических школ станут профессионалами в этой области (школа-то общеобразовательная). Это совершенно естественно и закономерно, более того, ложный профессионализм или математический снобизм должны отвергаться. Такая идея разделяется практически всеми авторами программ, представленных в сборнике. Поэтому программы тесно связаны с другими образовательными областями, в том числе и чисто гуманитарными.

Если в результате занятий в профильной школе, и в частности занятий элективным курсом, ученик выбирает путь продолжения образования, связанный с математикой, — ориентационная цель достигнута. Но если выпускник математического класса осознанно не выбирает «математическое будущее», то цель также достигнута. Недостигнутой она может считаться лишь в том случае, если ученик так и не понял, нравится ему математика или нет.

Важной целью обучения является ***знакомство учащихся с математикой как с общекультурной ценностью, выработка понимания ими того, что математика является инструментом познания окружающего мира и самого себя.*** Достижению этой цели также служат программы, представленные в сборнике.

В процессе преподавания математики может быть частично решен вопрос о более глубоком понимании учеником логики математического мышления. Очень важно показать, что ему (ученику) при решении разного рода «нематематических» проблем может помочь следование этой логике. Например, в рассуждениях, касающихся философии, политики и даже обыденной жизни, в развитии и логическом построении речи, в способности к критическому пониманию чужой речи, чужих логических построений и вообще к критическому восприятию действительности.

Постепенно изменяющаяся методика обучения в профильных классах (особенно на элективных курсах) должна постепенно развивать у учащихся навыки организации умственного труда и самообразования. Здесь и умение воспринимать объясняемый материал, достаточно быстро его конспектировать, с одной стороны, и умение работать с учебниками и иной литературой, с другой стороны. Кстати, ***одной из целей обучения является развитие уважения к книге (в первую очередь — учебной) вообще.*** В каждой из приведенных программ имеется список литературы. В процессе освоения программы хорошо бы дать учащимся возможность использовать различные учебники, задачники, хрестоматии, энциклопедии и т.д. Естественно, такая возможность имеется не во всех школах. Так, например, многие из приведенных в программах элективных курсов книги изданы в середине прошлого века и по тем или иным причинам могли не сохраниться в школьных библиотеках. Обращаем внимание на то, что большим подспорьем здесь может стать использование IT технологий. Это и глобальная сеть Иитернет, и учебные CD диски (в первую очередь так называемые электронные библиотеки).

Отдельно позволим себе остановиться на практике использования учителем электронных рефератов как элемента обучения и/или формы контроля уровня достижений учащихся. Часто можно встретиться с таким явлением: учитель задает классу написать тот или иной реферат, а ученик скачивает его из Интернета. Учитель же либо делает вид, что он этого не замечает, либо, наоборот, тратит значительное время на то, чтобы «поймать» ученика. Почему бы учителю (в качестве домашнего задания, зачетной работы, например) специально не попросить учеников найти в глобальной сети несколько рефератов по данной теме, изучить какое-то количество из них и сделать их аннотированный список или вы-брать из 2—3 текстов наиболее интересные места?

Мы считаем, что весьма полезно и уместно обсуждать со школьниками отдельные недостатки имеющихся учебников, поощрять самих учащихся к поиску этих недостатков (это относится и к программам приведенных в сборнике элективных курсов). Сборник, как уже говорилось выше, посвящен делу для нас новому, и, как следствие, программы, вошедшие в него, не лишены недостатков. ***Думаем, что и их выявление, а может быть, и устранение будут очень полезным результатом совместной деятельности учеников и преподавателей, осваивающих тот или иной элективный курс.***

С другой стороны, мы считаем чрезвычайно вредной резкую критику учебника в целом. Неумение найти и отметить в любом учебном пособии положительные стороны будет, на наш взгляд, мешать в интеллектуальной деятельности выпускникам школ, в частности в процессе обучения в вузе.

«Навигация» по содержанию программ элективных курсов

Рассмотрим некоторые особенности предложенных программ, расположив их (естественно, в определенном смысле условно) в порядке сложности с точки зрения математики.

Первые пять программ можно назвать сугубо **математическими**, практически они все требуют знания математики на высоком профильном или даже углубленном уровне.

1. «Геометрическое моделирование окружающего мира». Авторы: *Е.А. Ермак* и др.

Сложный курс, основа которого далеко и даже очень далеко выходит за пределы школьной программы, требует от учителя большой и специальной подготовки не только по элементарной геометрии, но и по различным разделам высшей геометрии, в частности сферической геометрии и геометрии Лобачевского. Хотя авторы старались сделать этот курс более популярным, им это далеко не всегда удавалось. При отсутствии «звездных» учащихся у учителя могут возникнуть большие проблемы с «приземлением» данного материала. Но если учителю удастся на основе предложенного авторами пособия четко, толково, популярно и в то же время без излишней математической «занудности» **рассказать** о различных ветвях геометрии и их приложении, то у школьников сформируется взгляд на геометрию не как на застывшую еще во времена Евклида или даже Галилея науку, а как на современнейшую науку, представленную в XX в. такими учеными, как А.Д. Александров, П.С. Александров, В.Г. Болтянский, Г.Б. Гуревич, Н.В. Ефимов, В.Ф. Каган, А.Н. Колмогоров, Н.Н. Лузин, А.В. Погорелов, М.М. Понтрягин, З.А. Скопец, П.С. Урысон, И.М. Яглом и многими другими. В процессе изучения курса решаются задачи по геометрии, в определенной мере связанные со школьными и абитуриентскими задачами. Однако за счет обилия теоретического материала на решение подобных задач может просто не хватить времени.

2. «Алгебра плюс: Элементарная алгебра с точки зрения высшей математики». Автор: *А.Н. Земляков.*

Серьезный курс, требующий от учителя очень хорошего знания элементарной математики и четких представлений об основах высшей математики. Слушателями этого курса, скорее всего, могут быть только учащиеся математического и естественно-научного профиля. При умелом подходе курс дает широкие возможности повторения и обобщения курса алгебры и основ анализа. В курсе решается и разбирается и учителем, и учащимися большое число сложных задач, многие из которых понадобятся как при учебе в высшей школе, так и при подготовке к различного рода экзаменам, в частности ЕГЭ. При желании учитель может по-разному расставить акценты в процессе ведения данного курса. Можно, к примеру, сделать крен в сторону «абитуриентской» математики. Этому способствует набор тем, рассматриваемых в процессе изучения курса. Особенно такой модной темы, как **алгебраические задачи с параметрами**, в ходе изучения которой с учащимися будут разобраны такие важные вопросы, как: рациональные задачи с параметрами, иррациональные задачи с параметрами, параметры и модули, критические значения параметра, метод интервалов в неравенствах с параметрами, замена переменной в задачах с параметрами, метод разложения на множители в задачах с параметрами, решения задач с помощью «разрешения относительно параметра», метод координат (или горизонтальных сечений) в задачах с параметрами, метод областей в рациональных и иррациональных неравенствах с параметрами, применение производной при анализе и решении задач с параметрами, выписывание и «собирание» ответа в задачах с параметрами. Как видим, учебное пособие по курсу явится, в частности, небольшой энциклопедией задач с параметрами. Автор отводит на данную тему всего 4 часа, что для большинства классов мало реально, но учитель, при желании, может на основе одной этой темы сделать прекрасный и популярный у учащихся элективный курс.

В этой программе, как, впрочем, и во всех других, автор рекомендует примерное почасовое планирование, однако, как нам представляется, в данном случае в связи со сложностью материала это планирование не вполне реалистично. Как мы уже говорили, учитель может вычленить в данном курсе отдельные модули и детально и продуктивно ими заняться. Ведение этого элективного курса потребует от преподавателя весьма большого времени на подготовку к нему, однако принесенные плоды, скорее всего, с лихвой возместят затраченные силы.

3. «Обоснование в математике (От Евклида до компьютера)». Авторы: *Е.А. Ермак* и др.

Данный элективный курс, как и все предыдущие, скорее всего, может быть предназначен только для учащихся математического профиля. Его выберет учитель, любящий и видящий красоту в логике доказательств и обоснований. Как всякий курс, связанный с логическими построениями, а следовательно, с «говорением» или «написанием» логических текстов, он может быть труден для преподавания и непривычен для восприятия. Однако он безусловно интересен и полезен. На наш взгляд, учитель может и вправе не давать весь огромный объем предложенного материала в целом, а сосредоточиться на отдельных его частях: геометриче-ской, статистической и вероятностной, или логической. Многое из включенного автором в методическое пособие может быть предложено отдельным учащимся для индивидуального изучения, сообразуясь с их желаниями и возможностями.

4. «Мир, математика, математики (историческая реконструкция элементарной алгебры и математического анализа)». Автор: *А.Н. Земляков.*

При всей серьезности изложенного материала, скорее всего, большое количество учителей захотят и смогут вести данный курс, а многие ученики пожелают им заниматься. Автору удалось совместить изучение глубоких математических идей с историзмом изложения. Учеников всегда занимает историческая составляющая конкретных наук. Занимаясь данным элективным курсом, ученики не только многое узнают по истории математики, но при умелом подходе учителя вволю «нарешаются» различных задач, познакомятся с новыми методами. Преподавателю будет более чем достаточно материала, изложенного автором в пособии. Многое из этого материала собственно на занятиях учитель рассказать явно не успеет. Однако не прочитанный на урочных занятиях материал может стать основой для докладов, презентаций, сообщений и других форм индивидуальной и групповой деятельности учащихся. Кроме того, стоит отметить, что учебное пособие, написанное автором на основе данного курса, будет важным подспорьем всем учителям математики в придании преподаванию «интеллектуального блеска». Учащиеся получат своеобразную и хорошо и оригинально написанную книгу по истории математики с использованием самой математики, а таких книг до сих пор практически не было.

5. «Замечательные неравенства, их обоснование и применение». Автор: *С.А. Гомонов.*

Программа курса вполне реального, «земного» и в то же время занимательного, интересного и безусловно развивающего. Автор уделяет много внимания уяснению связи математики с другими науками, в частности, им рассмотрены такие вопросы, как неравенства в математической статистике, экономике и финансовой математике, задачи на оптимизацию. Этот курс также главным образом предназначен для математического профиля, но может быть успешно адаптирован в школах, занимающихся экономическими проблемами, и в естественно-научном профиле в целом. В процессе изучения курса будет решено много полезных задач, в том числе и абитуриентского плана, хотя это далеко не главная задача автора. Почасовое планирование представлено автором более реально, чем в вышеописанных случаях, но и здесь учителю, скорее всего, придется кое-что подсократить и оставить для индивидуальной самостоятельной работы учащихся. Однако данный курс вполне годится для полугодового элективного курса своей четкой тематикой, связанной с важной темой школьной программы.

Две следующие программы могут использоваться в классах любого, в том числе и гуманитарного, направления.

6. «Математика в архитектуре». Авторы: *Н.Л. Стефанова.*

Этот курс может быть выбран учащимися любого класса, проявляющими интерес к математике. Об интересе к собственно архитектуре говорить не приходится, он проявляется практически у всех, однако в школьной программе архитектуре уделяется мало времени, разве что в курсе краеведения, истории мировой культуры или на внеурочных экскурсиях. Поэтому учитель, выбравший данный курс, особенно учитель не столичной школы, берет на себя в большой мере просветительскую функцию. Для ведения курса и участия в нем знаний по математике хватит и ученикам, и преподавателю. Что же касается знаний по архитектуре, то здесь, разумеется, потребуются некоторые дополнительные усилия. Преподавателю во многом помогут учебное пособие и методические рекомендации, сопутствующие данному курсу. Этот курс может вестись сразу двумя учителями — математики и, например, краеведения. К помощи в ведении курса могут быть привлечены и «внешкольные силы», например экскурсоводы, архитекторы, особенно если таковые имеются среди родителей. Мы надеемся, что учебное пособие будет издано с большим числом хороших иллюстраций (хотя это его и удорожит). Однако для ведения курса могут быть использованы самые современные технологии. Можно найти достаточно много компьютерных дисков (не говоря уже об Интернете), на которых имеются не только прекрасные слайды, но и фильмы и экскурсии по городам России и других стран. Примером такого диска может служить выпущенный энциклопедией Кирилла и Мефодия диск «Сокровища архитектуры». Впрочем, сведения по архитектуре можно найти в любой электронной энциклопедии. В общем при желании и умении данный элективный курс нетрудно сделать ярким и запоминающимся. В отношении математики он даст в прагматическом смысле немного, но в отношении развития личности и мировоззрения будет чрезвычайно полезен.

7. «Математический язык через призму естественного языка или язык математики». Авторы: *Н.Л. Стефанова* и др.

Предлагаемый элективный курс предназначен для реализации в старших классах школ гуманитарного профиля, в частности школ филологического профиля. В связи с этим исходными для обсуждения являются языковые проблемы, которые возникают как в естественном (даже обыденном) языке, так и в математическом языке. Знания по математике требуются на минимальном общеобразовательном уровне. Курс более филологический, чем математический, поэтому авторы и предлагают, чтобы его, по возможности, вели два учителя — математики и русского языка. Учителей может напугать название курса, если возникнет мысль о том, что разговор о математическом языке будет вестись на уровне предикатов и других понятий математической логики. Ничего такого в данном курсе практически нет, и это хорошо. Разговор идет более об истории написания цифр и формирования терминов и о системе изложения (устного или письменного) математических доказательств. Авторы указывают на то, что целью данного элективного курса является повышение уровня понимания элементов математического языка, вошедших в общую культуру современного человека, через установление связей математического и естественного языков.

Авторы активно используют поисково-исследовательскую деятельность учащихся, которая реализуется как на занятиях в классе, так и в ходе самостоятельной работы учащихся. Средствами для ее осуществления являются задания, которые предлагаются в сопровождающем курс учебном пособии. Задания весьма несложные и для учащихся, и тем более для учителя. Особенностью данного курса является и разнообразие предлагаемых авторами методик и технологий, своеобразная форма, в которой написано учебное пособие. Однако курс настолько прост и ясен, что учитель сможет всегда развернуть его в нужную сторону, в соответствии со своими вкусами и целями.

8. «Математические основы информации». Авторы: *Е.В. Андреева* и др.

Курс «Математические основы информатики» носит интегративный, междисциплинарный характер и ориентирован на учащихся физико-математического, частично естественно-научного и технико-технологического (компьютерно-технологического) профилей старших классов общеобразовательной школы. Курс рассчитан на учеников, имеющих базовую подготовку по информатике.

* * *

В заключение следует отметить, что в данном сборнике приведено всего лишь восемь программ элективных курсов по математике. Совершенно очевидно, что они ни в коей мере не охватывают весь спектр возможных в этой образовательной области элективных курсов. В частности, здесь практически отсутствуют курсы стохастической направленности, нет курсов решения занимательных задач, задач на сообразительность и смекалку и много, много другого. Вместе с тем мы надеемся, что, занимаясь по представленным в сборнике программам, учителя-практики почувствуют вкус к подобной деятельности и, как следствие, начнут большую работу по коррекции представленных и созданию новых программ.

ПОДРОБНЫЕ ПРОГРАММЫ ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСОВ

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, ИХ ОБОСНОВАНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ

С.А. Гомонов,
канд.физ.-мат.наук, доцент

Аннотация программы

Данная программа курса по выбору своим содержанием сможет привлечь внимание учащихся 10—11 классов, которым интересна математика и ее приложения и которым захочется глубже и основательнее познакомиться с ее методами и идеями (или самостоятельно, или под руководством учителя математики). Предлагаемый курс освещает намеченные, но совершенно не проработанные в общем курсе школьной математики вопросы. Выбрав его, учащиеся за полгода пройдут путь от доказательства простейших числовых неравенств, встречающихся на вступительных экзаменах в вузы, до обоснования «замечательных» неравенств Коши—Буняковского, Чебышева и Иенсона. Стоит отметить, что навыки в использовании этих неравенств совершенно необходимы всякому ученику, желающему хорошо подготовиться и успешно выступить на математических конкурсах и олимпиадах самого высокого уровня.

Этот курс, безусловно, заинтересует учителя математики возможностью познакомить своих учеников с понятиями и идеями (пусть и на интуитивном уровне) такого современного раздела «большой» математики, как выпуклый анализ, а значит, и возможностью вплотную подвести слушателей данного курса к границам современной математической науки. Материал предлагаемого «курса по выбору» поможет учителю показать своим ученикам как красоту и совершенство, так и сложность и изощренность математических методов, порожденных не только алгеброй и математическим анализом, но и геометрией и даже физикой.

Материал курса поможет учителю при выборе тематики занятий математического кружка для учащихся 8—9 классов, этот же материал и обширный список литературы (около 200 наименований) будут полезны студенту при выполнении курсовой или дипломной работы соответствующей тематики, а также при изучении экономики и математической статистики.

При проведении занятий по курсу на первое место, чему будет способствовать его «примерно-образцовая» структура, выйдут такие формы организации занятий, как дискуссия, диспут, выступление с докладами-отчетами о написании рефератов и осуществлении «поисковой» работы в книжно-журнальных областях, подсказанных учителем (безусловно, возможен и самостоятельный поиск с подключением зарубежных изданий и Интернета).

Не исключено, что данный курс поможет ученику найти свое призвание в профессиональной деятельности, потребующей использовать точные науки или, по крайней мере, приобрести внепрофессиональное увлечение (хобби) пусть и не «на всю оставшуюся жизнь».

Основные элементы программы

Прежде всего это — *пояснительная записка*, в которой указываются конкретные цели и задачи аннотируемого курса, называются превалирующие формы учения, предлагается схема распределения аудиторной нагрузки по темам и даются образцы организации самостоятельной работы ученика, отмечаются возможности и варианты подготовки и выполнения зачетных работ. Затем следует такой раздел, как *«Основное содержание курса»*. В этой части программы перечисляются основные содержательные единицы курса, а также темы для дискуссий, варианты заданий для самостоятельной работы учащихся.

«Организация и проведение аттестации учеников» определяет формы и цели проведения промежуточной и итоговой аттестации учащихся. В этом разделе также излагаются требования к уровню достижений ученика и разъясняются особенности рекомендуемой оценочной шкалы.

«Краткий биографический словарик».

«Краткий терминологический словарь».

«Список литературы», объединяющий около 200 наименований книг и журнальных статей.

Пояснительная записка

Селективный курс «Замечательные неравенства, их обоснование и применение» рассчитан на одно полугодие (35 ч) для учащихся 10—11 классов. Запланированный данной программой для усвоения учащимися объем знаний необходим для овладения ими методами решения некоторых классов задач оптимизационного характера без применения средств дифференциального исчисления, а также (пусть и на интуитивном уровне) для ознакомления с некоторыми идеями такого раздела современной математики, как выпуклый анализ. Целью данного курса является изучение избранных классов неравенств с переменными и научное обоснование (в той степени строгости, которая соответствует уровню школьной математики) методов их получения, а также выход на приложения изученного теоретического материала. Таковыми вначале будут решения примеров на установление истинности простейших числовых неравенств, встречающихся на вступительных экзаменах в вузы, а к завершению освоения курса — рассуждения, требующие уметь находить неравенства, помогающие справиться с данным конкретным заданием.

Итак, данный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, намечает и использует целый ряд межпредметных связей (прежде всего с физикой). Традиционные формы организации занятий, как лекция и семинар, безусловно, будут применяться, но на первое место выйдут такие организационные формы, как дискуссия, диспут, выступления с докладами (в частности, с отчетными докладами по результатам написания рефератов или выполнения индивидуального домашнего задания) или с содокладами, дополняющими лекционные выступления учителя или ученика. Возможны и разные формы индивидуальной или групповой деятельности учащихся, как «Допишем учебник», отчетные доклады («Эврика, или Вот что мы нашли!») по результатам «поисковой» работы на страницах книг и журналов, включая (по возможности) зарубежные, и сайтов в Интернете, тем более что целый ряд разделов курса, безусловно, позволяет выделить темы для индивидуальной и коллективной исследовательской работы учащихся.

Примерное распределение
аудиторной нагрузки по темам (35 ч)

Глава	Тема	Учебное время, ч	
		Лекция	Семинар
1	2	3	4
Часть I. Замечательные неравенства			
1	Числовые неравенства и их свойства.	0,5	0,5
2	Основные методы установления истинности числовых неравенств.	1	1
3	Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными. Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применение.	1	2
4	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных.	2	2
5	Неравенство Коши—Буняковского и его применение к решению задач.	1	1
6	Неравенства подсказывают методы их обоснования.	—	1
Часть II. Средние величины: их свойства и применение			
7	Средние степенные величины, соотношения между ними и другие источники замечательных неравенств.		
	а) Средние арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое в случае двух параметров.	0,5	1
	б) Геометрические интерпретации.	—	0,5
	в) Среднее арифметико-геометрическое Гаусса и среднее арифметико-гармоническое.	0,5	0
	г) Симметрические средние. Круговые неравенства.	—	1
	д) Среднее арифметическое взвешенное и его свойства.	1	0
	е) Средние степенные и средние взвешенные степенные.	1	1

Продолжение табл.

1	2	3	4
8	Неравенство Чебышева.		
	а) Неравенство Чебышева: простейший вариант и его обобщение, порожденное понятием одномонотонной последовательности.	1	—
	б) Неравенства, обобщающие как неравенство Чебышева, так и неравенство Коши—Буняковского.	0,5	—
9	Генераторы замечательных неравенств.		
	а) Мы с ними уже встречались: свойства квадратичной функции; геометрические модели.	1	1
	б) Свойства одномонотонных последовательностей — источник замечательных неравенств.	2	2
	в) Неравенство Иенсона (выпуклые фигуры и выпуклые функции, свойства центра масс конечной системы материальных точек).	2,5	1
	г) Исследование функции на выпуклость и вогнутость средствами математического анализа. Неравенства Коши—Гельдера и Минковского.	1,5	1
10	Применение неравенств.		
	а) Неравенства в математической статистике и экономике. Задачи на оптимизацию.	0,5	—
	б) Поиск наибольших и наименьших значений функций с помощью замечательных неравенств. Итоговая контрольная работа.	—	1,5

Замечание. Каждая глава заканчивается списком тем докладов и рефератов, а также подборкой задач для самостоятельного решения. Наиболее сложные параграфы, темы и задачи отмечены знаком (*). После десятой главы помещены тексты трех итоговых контрольных работ (по девять задач в каждой). Контрольные работы расположены по возрастающей степени трудности.

Отметим теперь некоторые варианты выполнения учениками зачетных заданий.

В простейшем варианте это может быть:

1) Решение учеником в качестве домашнего индивидуального задания предложенных учителем задач из того списка, что завершает каждую главу и называется «Задачи для самостоятельного решения». Следует отметить, что большинство задач данного курса — это задания, в которых предлагается самостоятельно установить «небольшую» теорему, т. е. провести небольшое самостоятельное математическое исследование, что существенно способствует развитию логического мышления учащихся.

2) Решение группой учащихся в качестве домашнего задания предложенных учителем задач из того же раздела «Задачи для самостоятельного решения» или из какого-либо другого источника.

По результатам выполнения этого домашнего задания учитель может выставить по традиционной пятибалльной системе «промежуточную» оценку за изучение курса (и таких заданий, а значит, и оценок за полугодие может быть не менее двух). Окончательная аттестация учащегося осуществляется по результатам выполнения итоговой контрольной работы (три варианта ее текста приведены в учебном пособии).

Однако более предпочтителен другой вариант аттестации учеников, а именно: для промежуточной аттестации учащихся рекомендовать им написать рефераты на предложенные учителем темы (список тем может быть сообщен заранее, чтобы ученики могли воспользоваться правом выбора темы или даже сумели предложить свои собственные «свободные» темы; ряд тем приводится в конце каждой главы).

Работа над рефератом может быть сугубо индивидуальной, но не исключаются темы, предназначенные для выполнения небольшой группой учеников. По совету учителя учащиеся для работы над рефератами, возможно, должны будут обратиться к различным источникам (журналы «Квант» и «Математика в школе», различные сборники конкурсных задач, монографическая литература, при возможности иностранные издания и сайты в Интернете). По результатам работы над рефератом учащимся предлагают выступить с докладом на уроке или принять участие в дискуссии или диспуте. Все это должно быть соответствующим образом оценено учителем. Кроме того, реферат может оказаться дополнением к той или иной главе данного пособия, тогда учащиеся станут участниками (и знают об этой возможности заранее!) такого рода деятельности, как «Допишем учебник». Таким дополнением к учебному пособию может оказаться цикл задач с решениями или еще один прием доказательства неравенств с переменными. Причем оценка выставляется одна за всю работу, но их может быть и несколько, если рассматривать отдельно некоторые, особенно интересные части написанного и доложенного реферата. Курс может и в этом случае завершаться написанием итоговой контрольной работы.

Основное содержание курса

ЧАСТЬ I. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Введение. Предмет, изучению которого посвящен данный курс. Исторические сведения. Преемственная связь с базовым курсом школьной математики. Средние величины и неравенство Коши. О задачах школьных математических олимпиад.

Глава 1. Числовые неравенства и их свойства. Понятие положительного и отрицательного действительного числа, число нуль. Основные законы сложения и умножения действительных чисел. Свойства суммы и произведения положительных чисел. Понятие «больше» для действительных чисел, его геометрическая интерпретация и свойства. Понятия «меньше», «не больше» и «не меньше» для действительных чисел и их свойства. Числовые неравенства.

Тема для дискуссии: «Легко ли определить знак числа или найти наибольшее из двух данных чисел, если числа заданы как значения некоторых числовых выражений?».

Простейшие свойства числовых неравенств. Монотонность функций и числовые неравенства.

Задания для самостоятельной работы:

1. а) Приведите примеры положительных и отрицательных действительных чисел.

   б) Вспомните символическую запись основных законов сложения и умножения действительных чисел.

   в) Попробуйте ответить, какими будут значения следующих числовых выражений (положительными, отрицательными числами или числом нуль):

   $(-3)^{1000}$; $\sin 600^\circ$; $\sqrt[3]{3} - \sqrt[5]{5}$; $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{5}$; $\sin(1001\pi - 1)$; $e^{\pi} - \pi^{e}$.

2. Выясните, какие из следующих утверждений истинны, а какие ложны:

   $2^{100} > 3^{50}$; $\mathrm{tg}1000^\circ > 0$; $\sin(101\pi - 1) > 0$; $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 2$;
   $0 > \log_{\sqrt{3}-1}\sqrt{7}$.

Глава 2. Основные методы установления истинности числовых неравенств. Сравнение двух чисел — значений числовых выражений «по определению», путем сравнения их отношения с единицей, путем сравнения их степеней, путем сравнения их с промежуточными числами (числом), метод введения вспомогательной функции, метод использования «замечательных» неравенств и некоторые другие. Примеры.

Тема для дискуссии: «Можно ли использовать вычислительную технику (микрокалькулятор) для сравнения значений числовых выражений? Ожидания и заблуждения».

Задания для самостоятельной работы:

1) В журнале «Квант» (или «Математика в школе») (в номерах, вышедших за определенный период) найти и решить задачи на сравнение значений числовых выражений (акция «Допишем учебник»).
2) Решить цикл задач из раздела «Задачи для самостоятельного решения» (номера задач и их количество определит учитель).

Глава 3. Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными. Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применения. Краткое введение. О применении неравенств с параметрами и об умении подбирать, сочинять и обосновывать (а то и опровергать) неравенства с параметрами. Банк-хранилище замечательных неравенств наибольшей востребованности.

Неравенство-следствие. Равносильные (эквивалентные) неравенства. Равносильные задачи на доказательство (установление) или опровержение неравенств. Методы установления истинности неравенств с переменными: метод «от противного», метод анализа, метод синтеза, метод усиления и ослабления, метод подстановки (метод введения новых переменных), метод использования тождеств, метод введения вспомогательных функций, метод уменьшения или увеличения числа переменных, метод понижения степеней выражений, образующих левую или правую части неравенства, метод интерпретаций или моделей (векторных, тригонометрических, физических). Примеры.

Тема для дискуссии: «Самое лучшее из решений. За и против». (Одно и то же неравенство может быть установлено несколькими способами. Какой из способов лучше и почему? Каждый из участников «защищает» «свой» способ решения задачи, критикует другие решения.)

Задания для самостоятельной работы: разобрать (по указанной учителем литературе) один из вариантов обоснования конкретного неравенства с переменными и подготовить сообщение в защиту данного способа установления этого неравенства

Глава 4. Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных. Индукция вообще и в математике в частности. Система аксиом Дж. Пеано. Схема применения принципа (аксиомы) математической индукции. Некоторые модификации метода математической индукции. Примеры. Две теоремы о сравнении соответствующих членов двух последовательностей с помощью сравнения разности или отношения двух соседних членов одной последовательности с разностью или отношением двух членов другой последовательности. Примеры.

Задание для самостоятельной работы: доказать две вышеуказанные теоремы, используя метод математической индукции.

Неравенство Коши для произвольного числа переменных. Исторический экскурс. Функциональное доказательство неравенства Коши. Примеры. Некоторые неравенства, эквивалентные неравенству Коши.

Тема для дискуссии и самостоятельной работы: «Какое из доказательств лучше и почему?». (Существуют десятки вариантов доказательства неравенства Коши, некоторые из них приведены в рекомендованной литературе; учащимся можно поручить разобрать самые яркие и интересные из них, чтобы потом провести дискуссию на указанную выше тему с учетом того, что «лучшее» можно понимать поразному.) В разделе «Задачи для самостоятельного решения» данной главы содержится более 60 задач (есть и со «звездочкой»), что позволит учителю предложить индивидуальные домашние задания многим учащимся с последующей проверкой и оцениванием этих работ.

Глава 5. Неравенство Коши—Буняковского и его применение к решению задач. Формулируется и обосновывается теорема, устанавливающая соотношение Коши—Буняковского и дающая критерий реализации этого соотношения в варианте равенства. Примеры. Геометрическая интерпретация неравенства Коши—Буняковского. Векторный вариант записи этого неравенства.

Тема для обсуждения или дискуссии: «Как ввести понятие величины угла между векторами?».

Задания для самостоятельной работы:

1) Решить указанные учителем задачи из раздела «Задачи для самостоятельного решения».
2) Придумать и доказать теоремы, обобщающие утверждения задач из указанного выше раздела (можно в рамках коллективной работы «Допишем учебник»).

По желанию учителя уже в этой части освоения курса можно решить некоторые задачи прикладного характера из главы 9 «Применение неравенств для нахождения наибольших и наименьших значений функций», что повысит интерес учащихся к изучаемому курсу.

Глава 6. Неравенства подсказывают методы их обоснования.

а) Метод Штурма. Примеры.

б) Использование симметричности, однородности цикличности левой и правой частей неравенства.

в) Геометрические неравенства, устанавливающие соотношения между длинами сторон треугольника.

Дополнительным разделом как источником тренировочных задач для развития навыков преобразования выражений является раздел «Условные тождества».

Тема для обсуждения или дискуссии: «Многообразие метода подстановки».

Задание для самостоятельной работы: решить указанные учителем задачи из статей соответствующей тематики журналов «Квант» или «Математика в школе».

Часть II. Средние величины: их свойства и применение

Введение. «Средние» в средней школе. Многообразие средних величин.

Глава 7. Средние степенные величины: соотношения между ними и другие источники замечательных неравенств.

Введение. Средние величины в школьном курсе математики, физики. Многообразие «средних».

а) Средние арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое и соотношение между ними в случае двух параметров. Геометрическая интерпретация. Четыре средние линии трапеции.

Тема для обсуждения или дискуссии: «Сохранится ли соотношение между средними величинами (арифметическим, геометрическим, гармоническим и квадратическим), если позволить входящим в них параметрам принимать произвольные действительные значения?».

б) Среднее арифметико-геометрическое Гаусса и среднее арифметико-гармоническое, их существование и свойства.

в) Симметрические средние. Теорема Мюрхеда. Круговые неравенства и методы их доказательства.

Задание для самостоятельной работы: изучить такие темы, как «Методы опровержения круговых неравенств», «Теорема Мюрхеда и ее применение».

г) Среднее арифметическое взвешенное и его свойства. Координаты центра масс конечной системы материальных точек.

д) Средние степенные и средние взвешенные степенные и их свойства. Примеры. Вывод неравенства Коши—Буняковского с помощью тождества Лагранжа.

Задания для самостоятельной работы:

1) Написать реферат на тему «Разные способы доказательства неравенства Коши—Буняковского». (Эта же тема может стать предметом обсуждения на уроке, проводимом в форме беседы, или стать основой для дискуссии.)
2) Решить цикл задач со «звездочкой» из завершающего главу раздела «Задачи для самостоятельного решения». (Помощь учителя, скорее всего, будет необходима, так как решения «звездных» задач представляют собой настоящие небольшие математические исследования. Найти решения этих задач — трудное индивидуальное задание на дом. Результаты такой работы могут быть доложены на уроке в виде доклада.)
3) Поручить нескольким учащимся (тем, кто математически послабее) подготовить выступления-содоклады к лекции учителя. Например, предложить учащимся подготовить для изложения на уроке доказательства некоторых свойств x-нормы.

Глава 8. Неравенство Чебышева и некоторые его обобщения.

Введение. Исторический экскурс. П.Л.Чебышев и его научное наследие.

а) Неравенство Чебышева: простейший вариант и его обобщение, порожденное понятием одномонотонной последовательности. Одномонотонная последовательность как результат обобщения понятия монотонных последовательностей и обнаружения некоторой «симметричности» выражений, составляющих левую и правую части неравенства Чебышева.

б) Неравенства, обобщающие как неравенство Чебышева, так и неравенство Коши—Буняковского.

Задания для самостоятельной работы: написать реферат и подготовить доклад на тему «П.Л.Чебышев и его научное наследие».

Глава 9. Генераторы замечательных неравенств.

Перечисляются основные способы получения замечательных неравенств, причем как ранее уже изученные (идет повторение ранее пройденного), так и совершенно новые.

а) Свойства квадратичной функции — источник простейших неравенств.

Тема для обсуждения: «Три доказательства неравенства Коши—Буняковского. Сходства и различия».

б) Неравенство треугольника.

Тема для обсуждения или дискуссии: «Варианты введения понятия расстояния между двумя точками».

в) Свойства одномонотонных последовательностей — источник замечательных неравенств:

1) Свойства двучленных и трехчленных одномонотонных последовательностей. Примеры. Свертка двух последовательностей.

Задание на дом: по данному учебному пособию самостоятельно разобрать доказательства свойств двучленных и трехчленных одномонотонных последовательностей и отчитаться о выполнении этой работы перед учителем (в послеурочное время).

2) Свойства одномонотонных последовательностей произвольной длины и их применение. Примеры.

Задание для самостоятельной работы: используя материал данного пособия, самостоятельно разобрать доказательства свойств одномонотонных последовательностей и отчитаться в выполнении этой работы перед учителем (в послеурочное время).

3) Одномонотонность нескольких последовательностей, их свойства и применения. Примеры.

4) Обобщения. Итоги. Применения изученных понятий и их свойств к получению новых замечательных неравенств. Неравенства, обобщающие одновременно и неравенство Коши—Буняковского, и неравенство Чебышева.

Творческое задание для самостоятельной работы: исследовать предложенную математическую «проблему»: «Если в теореме о свойстве свертки нескольких одномонотонных последовательностей отказаться от требования положительности их членов, то сохранится ли теорема?» (Подобные вопросы могут быть поставлены учителем перед учащимися и по поводу ряда других ранее рассмотренных теорем. Однако теоретический материал данной части главы весьма сложен и сформулированное выше задание можно предложить лишь самым упорным и любознательным ученикам. Возможно, учителю стоит существенно сократить изучение данной главы, отказавшись от проведения ряда громоздких доказательств.)

г) Неравенство Иенсона. Введение. Историческая справка. Краткий обзор результатов. Выпуклый анализ — раздел современной математики.

1) Свойства центра масс конечной системы материальных точек.

2) Выпуклые фигуры и выпуклые функции. Надграфик и подграфик функции. Неравенство Иенсона и его доказательство. Простейшие примеры применения.

Задание для самостоятельной работы: ответить на следующие вопросы из пособия:

> Упражнение 1. Придумайте десять примеров выпуклых и десять примеров невыпуклых фигур.
>
> Упражнение 2. Докажите, что пересечение нескольких выпуклых фигур есть выпуклая фигура. Верно ли, что объединение нескольких невыпуклых фигур есть фигура невыпуклая? Каков будет результат, если пересекать невыпуклые, а объединять выпуклые фигуры?
>
> Упражнение 3. Выясните, является ли одноточечное множество выпуклой фигурой. Какая версия ответа наиболее предпочтительна?

Теорема о связи свойств выпуклости надграфика или подграфика функции с ее выпуклостью или вогнутостью.

3) Выпуклость фигур и свойства центра масс конечной системы материальных точек.

Задание для самостоятельной работы: сформулировать и доказать неравенство Иенсона для случая выпуклости подграфика функции с использованием свойств координат центра масс конечной системы материальных точек. (Данное задание на дом может быть выполнено в виде стендового доклада.)

4) Исследование функций на выпуклость и вогнутость средствами математического анализа. Неравенство Коши—Гельдера и неравенство Минковского.

Достаточные условия вогнутости и выпуклости функции, заданной на указанном промежутке, в терминах ее производных первого и второго порядка (две основные теоремы разной степени общности и «тонкости»).

Примеры (таблица) функций, чья выпуклость или вогнутость устанавливается вышеуказанными теоремами. Конкретные виды неравенства Иенсона, порожденные функциями из таблицы. Неравенство Коши—Гельдера. Неравенство Минковского и другие примеры.

Задание для самостоятельной работы: по указанной учителем литературе продолжить таблицу выпуклых (вогнутых) функций с рассмотрением соответствующих этим функциям видов неравенства Иенсона (работа в рамках акции «Допишем учебник»).

*Замечание. Т*еоретический материал данной главы достаточно труден для изучения учащимися, поэтому учитель вполне может ограничиться рассмотрением лишь части данного материала, опираясь на наглядность и очевидность соответствующих свойств графиков конкретных функций и записав именно для них неравенство Иенсона с конкретным количеством параметров и конкретными значениями весов. Например, он может это сделать для логарифмической функции с выходом на получение неравенства Коши.

Глава 10. Применение неравенств. Задача Дидоны (упрощенный вариант) и другие задачи на оптимизацию. Поиск наибольшего и наименьшего значений функции с помощью замечательных неравенств.

Темами для дискуссий и докладов (в том числе и стендовых) могут стать решения «знаменитых» задач на поиск наибольших и наименьших значений функций. С наиболее интересными сообщениями учащиеся могут выступить и на межшкольных и даже междугородных конференциях (типа Всероссийской научно-практической конференции одаренных школьников Интел-Авангард).

Организация и проведение аттестации учеников

Чтобы оценить динамику усвоения учениками теоретического материала и поставить учащегося перед необходимостью регулярно заниматься, психологически очень важно предоставить подростку достаточно объективную информацию об уровне его знаний и умений, а значит, и об ожидающей его оценке. Кроме того, знание учителем уровня владения его учениками теорией и навыками ее применения (актуализирования) поможет ему внести определенные коррективы в учебный процесс (изменить темп и стиль проведения занятий, вернуться к ранее изученному материалу и повторить его, внести изменения в ранее данное индивидуальное задание ученику или группе учащихся для домашнего выполнения).

Наконец, надо помнить о необходимости и даже проблеме накопления оценок для итоговой аттестации. Последняя же необходима для оценивания общих успехов учащихся в освоении выбранного ими курса.

Однако особенность материала, составляющего данный курс, такова, что аудиторное выполнение письменных работ должно использоваться крайне осмотрительно и весьма осторожно, так как большинство задач на установление истинности неравенства с переменными — это небольшие исследования, результат которых — доказательства достаточно нетривиальных и отнюдь не очевидных теорем. Так что выполнение аудиторной письменной работы по данному курсу может потребовать от ученика очень много усилий и времени и заставит его пережить очередной и совершенно ненужный и вредный для здоровья стресс.

Именно поэтому по данному курсу вместо самостоятельных работ предполагается написание каждым учеником (индивидуально или в малой группе) двух рефератов с последующим выступлением на занятиях с сообщением или даже докладом-отчетом о проделанной работе. Возможно участие ученика в дискуссии или даже в диспуте на подсказанную учителем тему. Для некоторых же учеников (не ораторов) можно будет 2—3 раза за полугодие предусмотреть выполнение индивидуального домашнего задания (на оценку). Шкала оценок может быть оставлена традиционной («неуд.» — 2, «уд.» — 3, «хор.» — 4, «отл.» — 5).

Одна из форм самостоятельной работы учащихся — это подготовка небольшого доклада в дополнение к лекционному выступлению учителя. Заранее подготовленный, возможно, под нестрогим контролем учителя, такой доклад поможет учащемуся (даже не слишком «сильному» и разговорчивому) включиться в работу на уроке, развить и проявить свое ораторское мастерство. Кроме того, написание и «защита» рефератов учащимися могут быть элементом общегрупповой работы «Допишем учебник», которая может продолжаться несколько лет и даже идти с перерывами, так как курс «по выбору» не обязательно будет востребован ежегодно. Завершить курс может итоговая контрольная работа, три варианта которой (расположенные по возрастающей степени сложности, причем каждый содержит по девять задач) помещены в пособии сразу после девятой главы. Для итоговой отчетности по данному курсу написание такой работы имеет смысл, а вот для усвоения материала данного курса польза от такой работы невелика в силу ранее уже отмеченной специфики содержания курса.

Возможные критерии оценок

Критерии по выставлении оценок могут быть следующими.

Оценка «отлично» (5) — учащийся блестяще освоил теоретический материал курса, получил навыки в его применении при решении конкретных математических задач, имеющих прикладной характер; в процессе написания и защиты рефератов, выполнения стендовых докладов, работы над индивидуальными домашними заданиями ученик продемонстрировал умение работать с литературными источниками; он отличался активным участием в диспутах и обсуждениях проблем, поставленных и решаемых в данном курсе; кроме того, ученик отличился творческим подходом и большой заинтересованностью как при освоении курса в целом, так и при выполнении порученных ему учителем заданий. Он научился работать в малых группах, находить и использовать информацию в рекомендованных бумажных и электронных изданиях, очевиден и несомненен его интеллектуальный рост и рост его общих умений.

Оценка «хорошо» (4) — учащийся освоил идеи и методы данного курса в такой степени, что может справиться со стандартным заданием; ученик справился с написанием рефератов, но проявил чисто компилятивные способности, выполнил (но без проявления явных творческих способностей) домашние задания; можно сказать, что оценка «хорошо» — это оценка за усердие и прилежание, которые привели к определенным положительным результатам, свидетельствующим и об интеллектуальном росте, и о возрастании общих умений слушателя курса.

Оценка «удовлетворительно» (3) — учащийся освоил наиболее простые идеи и методы курса, что позволило ему достаточно успешно выполнить такие задания, как написание двух рефератов (пусть при этом проявились его чисто компилятивные способности), в итоговой контрольной самого простого состава задач ученик справился с 4—5 задачами.

Оценка «неудовлетворительно» (2) — ученик не проявил ни прилежания, ни заинтересованности в освоении курса (скорее всего, выбор им этого элективного курса оказался ошибкой), он халатно отнесся к написанию рефератов и выполнению индивидуальных домашних заданий; дискуссии были для ученика неинтересны, и он уклонялся от участия в них, в итоговой контрольной работе самого простого состава задач он справился всего с 1—2 задачами.

Следующие части пособия — это «Краткий биографический словарик», в котором будут в алфавитном порядке перечислены имена ученых (с краткими биографическими сведениями), упомянутых в данном пособии; «Краткий терминологический словарь», в котором также в алфавитном порядке будут перечислены основные понятия, введенные в данном пособии, и в заключении которого будут приведены все основные замечательные неравенства, рассмотренные в данном пособии, и, наконец, «Список литературы», включающий около 200 наименований книг и журнальных статей.

Список литературы

КНИГИ И БРОШЮРЫ

Основной список

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. — М.: Наука, 1975.

Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987 (Б-чка «Квант». Вып. 61).

Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. — М.: Мир, 1965.

Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965.

Блох А.Ш., Трухан Т.Л. Неравенства. — Минск.: Народная асвета, 1972.

Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1986.

Гаврилов В.И. Математический анализ. Курс лекций. Ч. II. — М.: Школа имени академика А.Н. Колмогорова, 1999. — 80 с.

Кипнис И.М. Сборник прикладных задач на неравенства: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1964.

Корн Г., Корн Т. Справочник для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968.

Коровкин П.П. Неравенства. — М.: Наука. 1966.

Кречмар В.О. Задачник по алгебре. — М.: Наука, 1964.

Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по решению математических задач: Алгебра. Тригонометрия. — М.: Просвещение, 1984.

Ляпин С.Е., Баранова И.В., Борчугова З.Г. Сборник задач по элементарной алгебре. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1973.

Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее применение. — М.: Мир, 1983.

Математика: Большой справочник для школьников и поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 1998.

Моденов П.С. Сборник задач по математике с анализом решений. — М.: Советская наука, 1959.

Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства/ Пер. с арм. Г.В. Григорян. — М.: Физматлит, 2002.

Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. — М.: Наука, 1967.

Симонов А.С. Экономика на уроках математики.— М.: Школа-Пресс, 1999 (Б-ка журнала «Математика в школе»).

Смышляев В.К. Практикум по решению задач школьной математики. Вып. 5: Практикум по решению задач повышенной трудности. — М.: Просвещение, 1978.

Соминский И.С. Метод математической индукции. — М.: Наука, 1974.

Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М. О математической индукции. — М.: Наука, 1967.

Харди Г.Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.

Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учебное пособие для 10 кл. средней школы.— М.: Просвещение, 1989.

Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970.

Дополнительный список

Анциферов Е.Г., Ащенков Л.Т., Булатов В.П. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 1. Математическое программирование. — Новосибирск: Наука, 1990.

Балк М.Б., Балк Г.Д. Поиск решения. — М.: Дет. лит., 1983.

Башмаков М.И. Методические разработки для учащихся ВЗМШ по теме «Последовательности» и «Метод математической индукции». — М.: Изд-во АПН СССР, 1976.

Болтянский В.Г., Яглом И.М. Выпуклые фигуры. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.

Бродский Я.С., Слипенко А.К. Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. — Киев: Выща шк. Гольвное издво, 1988.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехин С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра: Справочное пособие. — М.: Наука, 1988.

Васильева И.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. — М.: Наука, 1985.

Всероссийские математические олимпиады школьников: Кн. для учащихся/ Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б. — М.: Просвещение, 1992.

Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986.

За страницами учебника математики. — М.: Просвещение, 1989.

Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Уч. пособие для 10—11 кл. средней школы/ Б.М. Ивлев и др. — М.: Просвещение, 1990.

Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. — 2-е изд. — М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова; Дело и сервис, 1999.

Зарубежные математические олимпиады/ Под ред. Сергеева Н.Н. — М.: Наука, 1987 (Б-ка матем. кружка).

Кокстер Г.С. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.

Колмогоров А.Н. Математика — наука и профессия.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988 (Б-чка «Квант». Вып. 64).

Магарил-Ильясов Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. — М.: УРСС, 2003.

Монахов В.М., Беляева Э.С., Краснер Н.Я. Методы оптимизации. Применение математических методов в экономике: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1978.

Морозова Е.А., Петраков И.С. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги: Пособие для учащихся. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 1971.

Новоселов С.И. Алгебра. Элементарная математика для учительских институтов. — М.: Учпедгиз, 1947.

Петраков И.С. Математические олимпиады школьников.— М.: Просвещение, 1982.

Петров В.А. Прикладные задачи на уроках математики: Книга для учителей математики и студентов математических факультетов педвузов. — Смоленск: Изд-во СГПУ, 2001.

Расулов К.М., Василенков В.П., Елисеев Ю.Г. Смоленские математические олимпиады школьников. — Смоленск: СОКО, СГПИ, СИУУ, 1995.

Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. — М.: Наука, 1978.

Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. — М.: Наука (Б-чка «Квант»).

Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. — М.: Дело, 1995.

Шандер В.Н. Уравнения и неравенства: Методические разработки для учащихся ОЛ «ВЗМШ» Российской академии образования при МГУ. — М.: Изд-во РАО, 1992.

СТАТЬИ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» И ПРИЛОЖЕНИЙ К НЕМУ

Азевич А.И. Система подготовки к Единому государственному экзамену. — М., 2003. — № 4. — С. 32—36; 48—49.

Айзенштат Я.И. Доказательство неравенств методом математической индукции. — М., 1976. — № 2. — С. 89.

Аксенов А.А. Решение задач методом оценки. — М., 1999. — № 3. — С. 30—34.

Алексеев Р.Б., Курляндчик Л.Д. Неравенства и интеграл. — М., 1993. — № 2. — С. 53—56.

Алексеев Р.Б., Курляндчик Л.Д. Неравенства. — М., 1991. — № 4. — С. 49—53.

Алексеев Р.Б., Курляндчик Л.Д. Неравенства. — М., 1991. — № 3. — С. 44—46.

Алексеев Р.Б., Курляндчик Л.Д. Нетрадиционные способы доказательства традиционных неравенств. — М., 1991. — № 4. — С. 49—53.

Алозян М.Е. Одна имитационная система. — М., 1994. — № 3. — С. 54—57.

Алозян М.Е. Целые и дробные части чисел в примерах. — М., 1988 . — № 5. — С. 41—42.

Антипов И.Н. Боковнев О.А. Выделение областей на координатной плоскости. — М., 2001. — № 5. — С. 50—55.

Балк М.Б. Применение производной к выяснению истинности неравенств. — М., 1975. — № 6. — С. 47—53.

Балк М.Б., Паравян Н.А. Неравенства Гюйгенса и их применение. — М., 1974. — № 2. — С. 70—74.

Балк М.Б., Пискарев Г.Ф. О некоторых приложениях понятия интеграла в школьном курсе математики. — М., 1977 . — № 6. — С. 21— 26.

Берколайко С.Т. Применение неравенства Коши к доказательству неравенства Непера. — М., 1978. — № 1. — С. 72—73.

СТАТЬИ ЖУРНАЛА «КВАНТ»

Алексеев Р., Курляндчик Л. Стороны треугольника. — М., 1993. — № 9—10. — С. 69—70; 94—95.

Алексеев Р., Курляндчик Л. Сумма минимумов и минимум суммы.— М., 1991.— № 3.— С. 49—51; 55.

Алексеев Р., Курляндчик Л. Тригонометрические подстановки. — М., 1995. — № 2. — С. 40—42; 58.

Балк М., Ломакин Ю. Доказательство неравенств с помощью производной. — М., 1979. — № 10. — С. 36—38.

Балк М., Мазалов М. Как же доказать это неравенство? — М., 1995. — № 6. — С. 43, 49, 62.

Болтянский В. Метод отделяющих констант. — М., 1977. — № 4. — С. 46—50; 60.

Башмаков М. Геометрические неравенства. — М., 1970. — № 2.

Бендунидзе А. Начинаем с неравенства Евклида. — М., 1990. — № 12. — С. 34—35.

Берколайко С. Интеграл помогает доказать неравенство Коши. — М., 1979. — № 8. — С. 26.

Берколайко С.Т. Использование неравенства Коши при решении задач. — М., 1975. — № 4. — С. 37—40; 60.

Берколайко С.Т., Каток С.Б. Об одном индуктивном методе доказательства неравенств. — М., 1970. — № 8. — С. 33—36.

Бржозовский М.И. Уравнения орнаментов. — М., 1972. — № 7. — С. 14—19.

Бронштейн Е. Сюрпризы выпуклого мира. — М., 1996. — № 4. — С. 13—16.

Винокур Р. Дешевый ящик. — М., 1979. — № 5. — С. 21.

Власов А. Задачи на сравнение чисел. — М., 1986. — № 2. — С. 24—26.

СТАТЬИ В ПРИЛОЖЕНИЯХ К ЖУРНАЛУ «КВАНТ»

Квант для младших школьников: Математика 6—8.— М.: Бюро Квантум, 1998. — 128 с. (Приложение к журналу «Квант», № 3/98).

Математический кружок. Вып. 3. — М.: Бюро Квантум, 1999. — 128 с. (Приложение к журналу «Квант», № 3/99).

Математический кружок. Вып. 4. — М.: Бюро Квантум, 1999. — 128 с. (Приложение к журналу «Квант», № 5/99).

Практикум абитуриента: Алгебра и тригонометрия — М.: Бюро Квантум, 1995. — 128 с. (Приложение к журналу «Квант», № 3/95).

Школа в «Кванте»: Алгебра и анализ. — М.: Бюро Квантум, 1994. — 128 с. (Приложение к журналу «Квант», № 4/94).

Школа в «Кванте»: Арифметика и алгебра. — М.: Бюро Квантум, 1994. — 128 с. (Приложение к журналу «Квант»).

СТАТЬИ В ЕЖЕНЕДЕЛЬНОМ ПРИЛОЖЕНИИ К ГАЗЕТЕ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

«Математика»

Антонова Н., Солодовников С. Неравенство Коши о средних арифметическом и геометрическом. — М., 1999. — № 20. — С. 26—27.

Башарин Г.П. Элементы финансовой математики. Часть вторая. — М., 1996. — № 16.— С. 1—24.

Винокуровы Е. и Н. Экономика в задачах. — М., 1998. — № 34.— С. 1—29.

Галицкий М. Задачи по алгебре. — М., 1998. — № 6. — С. 7—10.

Кирзимов В. Применение векторов к решению алгебраических и геометрических задач. — М., 2001. — № 32.— С. 13—15.

Клостер Г. Метод математической индукции. — М., 2003. — № 23.— С. 12—16.

Метод математической индукции. Занятия-практикумы, № 1—2. — М., 1994. — № 36.— С. 7.

Метод математической индукции. — М., 1993. — № 9—10. — С. 8.

Неравенства. — М., 1993. — № 9—10. — С. 2.

Павлова О. Свойства числовых неравенств. — М., 2002. — № 1. — С. 11—12.

Смолянов А. Применение тригонометрических подстановок в алгебре. — М., 1996. — № 25.— С. 14.

Токарева Л. Неравенства. — М., 1998. — № 15. — С. 2—4.

Токарева Л. Тригонометрические неравенства. Приемы доказательств. — М., 2002. — №№ 44, 47. — С. 22—26; С. 23—26.

Чистяков Н. Неравенства Коши о средних арифметическом и геометрическом. — М., 2000. — № 8. — С. 29—30.

МИР, МАТЕМАТИКА, МАТЕМАТИКИ (ИСТОРИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА)

А.Н. Земляков,
канд.пед.наук, ведущий научный сотрудник лаборатории дифференциации образования ЦЭПД РАО,
г.Черноголовка, Моск.обл.

Математика со времени ее зарождения как науки (VI в. до н.э.) и много раньше была тесно связана не только с цивилизацией, с практикой, но со всей общечеловеческой культурой — со всем миром. И математические теории, и методы открывались, создавались конкретными личностями, математиками, жизнь и судьба которых, интересная и насыщенная, поучительная и порой трагическая, неотделима от исторической эпохи, в которую они творили. Помочь представить школьную и близкую к ней математику в контексте культуры и истории — основная задача этой книги, адресованной в первую очередь старшеклассникам и учителям.

Читатель найдет здесь не только конкретно-исторические обстоятельства «сотворения» современной школьной математики — алгебры и математического анализа, а попутно, конечно, и геометрии. В книге изложены как история развития математических идей, так и сами идеи; приведен существенный материал, относящийся собственно к рассматриваемым вопросам; объясняются не только «теории», но и задачи. Важная цель этой книги — помочь повысить уровень понимания и практической подготовки в таких вопросах, как алгебраические уравнения и обращение с многочленами; числа — от делимости натуральных чисел до пользы от чисел комплексных; применения метода координат и решение задач на построение; интересные и неожиданные примеры и приложения математического анализа.

Заметим, что многие из разбираемых чисто математических вопросов относятся к темам, популярным на вступительных экзаменах в вузы естественно-научного профиля. А будущий абитуриент-гуманитарий найдет в книге много сведений из истории культуры, науки, в том числе философии...

Часть I. Введение в историю алгебраических уравнений и предысторию математического анализа (10/11 классы)

В этой части курса мы рассматриваем историю тех разделов элементарной математики (пока не касаясь математического анализа), которые наиболее близки к школьной алгебре. Алгебру можно назвать наукой (и искусством, как ее называли математики XVI века!) о преобразованиях различных алгебраических выражений и отыскании решений разнообразных алгебраических уравнений. В школе досконально разбираются линейные и квадратные уравнения. Математики занимались ими с незапамятных времен — в Вавилоне, в Египте, в Древней Греции еще до нашей эры, на Востоке — в Средние века, в Европе — начиная со II тысячелетия вплоть до эпохи Возрождения. То, чему сейчас учат в школе, нередко имеет многотысячелетнюю историю, причем отнюдь не анонимную: математические достижения, в том числе и в решении квадратных уравнений, всегда имеют авторов, причем, как правило, многих.

Древние греки, а вслед за ними, например, Омар Хайям пытались решить и кубические уравнения. Все они немного преуспели. Только в XVI в. математикам удалось научиться решать кубические уравнения, а вслед за ними и уравнения степени 4. Со времени Кардано, одного из самых выдающихся ученых эпохи Возрождения, начала развиваться общая теория алгебраических уравнений. Одновременно с этим шли упорные поиски общих формул для решения уравнений степени 5 и выше. Они потерпели, как известно, фиаско, но это не было поражением математики (алгебры) и математиков. Напротив, достижения Руффини, Абеля и Галуа, доказавших неразрешимость уравнений степени 5 и выше в радикалах, послужили стимулом для развития совсем новых алгебраических и аналитических теорий. Такова диалектика математики...

Кроме истории алгебраических уравнений, доведенной до изобретений и открытий Виета, в этой части рассматривается краткий, но крайне важный период почти революционного развития математики: вторая четверть XVII в., бывшая как бы временем сумерек перед рассветом — изобретением совсем новой области математики, математического анализа. Характерные личности этого времени — Галилей, Ферма и Декарт. Так что история школьной алгебры прослеживается в этой части вплоть до зарождения анализа.

ОГЛАВЛЕНИЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ

Глава 1. Введение в историю алгебраических уравнений

§ 1.1. Уравнения квадратные и кубические

1.1.1. Истоки алгебры. Геометрия древних греков
1.1.2. Квадратные уравнения: решение заменой
1.1.3. Долгий путь от геометрии к алгебре
1.1.4. Кубические уравнения: упрощение
1.1.5*. Теорема о существовании корней многочленов нечетной степени
1.1.6. Формула для корней кубических уравнений
1.1.7. Как пользоваться формулой Кардано

§ 1.2. Великое искусство и жизнь Джероламо Кардано

1.2.1. По пути к формуле Кардано
1.2.2. Вокруг формулы Кардано
1.2.3. Тарталья и Феррари. Кардано — человек эпохи

§ 1.3. Уравнения четвертой степени

1.3.1. Упрощение уравнений степени 4
1.3.2. О разложении многочленов степени 4
1.3.3. Метод Феррари решения уравнений степени 4
1.3.4. Метод Декарта решения уравнений степени 4
1.3.5. «Великое искусство» — шаг Кардано в алгебру
1.3.6. Следующий шаг: искусство Бомбелли

§ 1.4. Уравнения и многочлены

1.4.1. Алгебраические уравнения и многочлены
1.4.2. Делимость и разложение многочленов
1.4.3*. Разложение многочленов на неприводимые множители
1.4.4. О разложении кубических многочленов
1.4.5. Деление многочленов на двучлен. Теорема Безу
1.4.6. Алгоритмы деления на двучлен. Метод Руффини—Горнера

§ 1.5. Следствия из теоремы Безу

1.5.1. Делимость многочлена на двучлен. Число корней многочлена
1.5.2. Формулы сокращенного умножения
1.5.3. Метод разложения. Отыскание рациональных корней
1.5.4. Применение теоремы о корнях к числовым задачам
1.5.5. Разложение методом неопределенных коэффициентов
1.5.6*. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов

1.5.7*. Задание многочленов значениями. Многочлены Лагранжа
1.5.8. Жизнь и судьба Лагранжа
§ 1.6. Аналитическое искусство и жизнь Франсуа Виета
1.6.1. Алгебраические новации Виета и его последователей
1.6.2. Кубические уравнения у Виета
1.6.3. Неприводимый случай кубического уравнения у Виета
1.6.4. Графическое исследование кубического уравнения
1.6.5. Судьба и королевская карьера Виета
§ 1.7*. Теорема Виета и комбинаторика
1.7.1. Полностью разложимые многочлены. Первые теоремы Виета
1.7.2. Решение систем Виета. Пример
1.7.3. Комбинаторика перестановок
1.7.4. Перестановки с повторениями и системы Виета
1.7.5. Комбинаторика сочетаний
1.7.6. Комбинаторика размещений. Перестановки с повторениями
1.7.7. Общие система и теорема Виета
1.7.8. Формула Ньютона для степени бинома
1.7.9. Метод Руффини—Горнера и треугольник Паскаля

Глава 2. Предыстория математического анализа
§ 2.1. Галилей и Декарт. Новая математика
2.1.1. Научная революция Нового времени
2.1.2. Жизнь Галилея
2.1.3. Геометрическая алгебра Декарта
2.1.4. Алгебраический метод геометрических построений
§ 2.2. Координаты. Жизнь и вера Декарта
2.2.1. Метод координат Ферма—Декарта
2.2.2. Конические сечения в школе
2.2.3*. Разрешимые и неразрешимые задачи на построение
2.2.4. Жизнь и вера Декарта
§ 2.3. Задачи на максимум и минимум. Ферма и теория чисел
2.3.1. Экстремальные задачи до Ферма
2.3.2. Метод Ферма и аналитическая теорема Ферма
2.3.3*. Экстремальный принцип Ферма
2.3.4. Жизнь и математика Пьера Ферма
2.3.5*. Ферма и теория чисел
2.3.6. «Академия» Марена Мерсенна и его числа

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ

Основной структурной дидактической единицей учебного пособия является пункт параграфа. Это не равномерная дидактическая единица (не типа «параграф-урок»), что обусловлено характером учебного пособия и его двоякой направленностью.

Вторая тема (глава 2) объективно труднее первой: чем ближе мы подходим к математическому анализу, тем «изощреннее» становится математика. Задача решения уравнения, естественно, проще, чем задача на отыскание наибольшего/наименьшего значения выражения. И обращаться с единственной числовой переменной проще, чем иметь дело с парой переменных и с геометрическими образами на координатной плоскости, и т.д.

В связи с этим несколько меняется и стиль изложения в учебном пособии, приспосабливаясь к характеру материала. Так, некоторые пункты даются в проблемной трактовке — в виде логически связного текста, в котором комментарии перемежаются с постановкой заданий. Четкое разведение математического содержания и гуманитарного, культурно-исторического контекста, характерное для изложения большей части первой главы, сменяется взаимным «растворением», диффузией математического и гуманитарного содержаний.

Мы отчасти компенсируем различия между главами (темами) в пособии для учителя характером и степенью подробности методического комментария к отдельным пунктам параграфов.

Учебное пособие было задумано как самоучитель. В какой степени это удалось в отношении математического содержания — не нам судить. Но что касается культурно-исторического дискурса, или, иначе говоря, гуманитарного содержания с опорой на математический контекст, то здесь доступность для самостоятельного изучения, нам кажется, удалось обеспечить.

Учебное пособие структурно и методически выстраивалось так, чтобы в большинстве случаев методика преподавания, преподнесения материала была ясна без дополнительных объяснений. В связи с этим пособие для учителя в своей утилитарной, практической части построено как минимальный методический и иногда методологический комментарий. Этот комментарий структурирован по пунктам параграфов. Указано время, рекомендуемое для изучения каждого пункта; рекомендуемые формы проведения занятий; те или иные нюансы, когда они действительно есть (и желательно их учесть); связи внутри элективного курса, когда они не очевидны.

Определяя методику проведения занятий, учитель должен учитывать «самообразовательную» направленность учебного пособия или, по крайней мере, его самообразовательную компоненту. Пересказ содержания учебного пособия неинтересен и, на наш взгляд, антипедагогичен. Мы полагаем, что имеет смысл избрать форму комментирования учебного материала — главного или того, который как-то отражен в специально оставленных открытыми вопросах. Чаще всего это сделано неявно, как в нескольких случаях применения метода математической индукции; в подобных случаях иногда это оговаривается в методическом комментарии. Иной раз открытые вопросы, задачи или задания сформулированы явно, прямо провоцируя школьника или другого читателя на активность — на поисковую активность.

Внутрикурсовые связи довольно сильны. Укажем только на цепочку вопросов, приводящую к теореме Виета в первой главе, и то, как используется эта теорема для степеней 2 и 3 во второй главе (свойства параллельных хорд коник; неразрешимость задач в квадратных радикалах).

Гуманитарной компонентой можно распоряжаться по-разному. Поначалу, в комментариях к первым параграфам главы 1, мы указываем некоторые возможные формы работы с гуманитарным содержанием — от учительского изложения (точнее, узловых комментариев к культурно-историческому дискурсу из учебного пособия) до ученических мини или настоящих конференций с сообщениями и докладами, с обсуждением и свободной дискуссией.

Формы подачи гуманитарного содержания в учебном пособии весьма разнообразны: от простых сопутствующих комментариев исторического, биографического или лингвосемиотического (греч. semeiotike, от semeion — знак: наука о знаках, знаковых системах; здесь подразумевается символический язык математики) свойства до развернутых жизненно-творческих биографий участников математической эпопеи. А иногда, как уже упоминалось, математическое и гуманитарное содержание «диффундируют», взаимопроникают друг в друга — наподобие некоторых таких текстов из известной книги Р.Куранта и Г.Роббинса «Что такое математика?» (Элементарный очерк идей и методов/ Пер. с англ. — М.: Просвещение, 1967; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001; М.: МЦНМО, 2001— 3-е изд., испр. и доп.). Эти содержания и не надо отделять, ориентируясь на математическое содержание и комментируя гуманитарное только в случае необходимости (в классах гуманитарных профилей — напротив, учитель ориентируется на гуманитарную компоненту содержания, лишь при необходимости привлекая математический комментарий). Подобного рода фрагменты и целые пункты параграфов часто встречаются в главе 2.

Обратим внимание и на «видеоряд» — «галерею» портретов многих действующих лиц, от Фалеса до Эйнштейна. Мы постарались показать те или иные портреты всех упоминающихся в тексте учебного пособия ученых, но портреты многих из них не сохранились, если когда-либо существовали. Посоветуйте школьникам посмотреть на глаза математиков, тех же Больцано и Коши. Полагаю, не нужно пренебрегать этой эмоционально-«эстетической» возможностью. Многие биографические сведения, наверное, также могут иметь эмоционально-психологическое воздействие на школьников и способны вдохновить их «на великие дела» («Что примера лучше действует?..» — А.С.Пушкин, «Бова-королевич»).

Остановимся на выборе тематики глав 1—2 первой части элективного курса. Первый критерий, и для этой части почти решающий, — близость к основному курсу математики как в понятийном, так и в методическом плане. Второй критерий, также крайне существенный: методологическая важность понятий и теорий, раскрываемых в рамках культурно-исторического дискурса. Третий критерий, который мы не могли не учитывать, — утилитарная ценность, или полезность, вовлекаемого в культурно-исторический дискурс, в гуманитарный фон.

(Как видите, мы отталкиваемся от предположения, что данный элективный курс будет использоваться в классах математического или естественно-научного профиля. Если электив используется в «гуманитарном сообществе» школьников — например, в классах гуманитарного профиля, — то «гуманитарный фон» становится основным содержанием, а математическое содержание — «фоном». Наверное, для такого варианта использования электива должна быть разработана особая стратегия и тактика, специальная методика.)

Под утилитарной направленностью мы понимаем несколько векторов: способствование лучшему, более прочному и сознательному усвоению основного и профильного курсов математики; упрочение знаний, умений и навыков, необходимых для успешности учения в профильных классах и для достижения лучших результатов, буде они проверяемы через обычные контрольные работы, зачеты и коллоквиумы (напомним: лат. colloquium — собеседование; обычно коллоквиумы — это собеседования по теоретическим вопросам), экзамены или даже ЕГЭ; качественное улучшение не только уровня математической культуры (это очень существенное качество, но в малой степени утилитарное), но и качества подготовки к продолжению образования. Последнее включает: осознанность выбора дальнейшей профессии или просто области будущей деятельности; качественная подготовка к конкурсным экзаменам в университеты и вузы естественно-математического или физико-технического (мы имеем в виду отнюдь не только МФТИ, но и МИФИ, МВТУ, МИСиС и т.д.) профиля (для гуманитарных классов имеется возможность лучшей подготовки в такой важной гуманитарной области, как история науки); в какой-то степени подготовка к учебе на младших курсах вузов (это касается не только и не столько содержания (хотя усвоение темы «Конические сечения в школе», без сомнения, поможет первокурснику лучше «переварить» классическую аналитическую геометрию), сколько формы: работа с текстом, конспектирование, подготовка докладов и сообщений...).

Возвращаясь ко всем трем принципам отбора — не содержания, а именно тематики (одну и ту же тематику можно реализовать во многих разных содержаниях), специально отметим коренное отличие этих принципов от ориентации на популярность или занимательность. В этом отличие данного учебного пособия как от множества научно-популярных книг, посвященных, как правило, какой-то узкой проблеме или конкретным ученым, так и от, скорее, занимательных энциклопедий по математике для детей и школьников. Нет ничего проще, скажем, взять того же Пифагора и «нанизать» на его легендарную историю множество математических и околоматематических «фенечек». Наша задача педагогическая — не повторяясь, сошлемся на «Пояснительную записку» к программе курса.

С другой стороны, учебное пособие по своему замыслу должно быть интересным и последовательным, цельным и связным повествованием, «хребтом», стержневой линией которого является последовательность связанных, зацепленных одно с другим математических содержаний, проецирующихся на школьный курс математики. Мы говорим о всей школьной математике без разделения на алгебру, геометрию, анализ: в реальности во многих пунктах, позициях, темах эти предметы соединены, подобно сиамским близнецам, и незачем их разделять. Ярчайший пример такого соединения — «Геометрия» Рене Декарта (1637 г.), в которой на самом деле произведен самый решительный «поворот руля» от древнегреческой геометрико-алгебраической традиции к современной алгебре, да такой, что на горизонте стал маячить еще не родившийся математический анализ.

Таким образом, занимательность и популярность мы, по замыслу, заменяем на интересность и доступность, не отступающую от основных принципов: опора на школьный курс, методологическая важность (вкупе с методической целесообразностью), утилитарная направленность.

Основываясь на этих принципах, для первой части элективного курса мы отобрали, во-первых, линию изучения алгебраических уравнений — разумеется, согласно основной концепции (см. «Пояснительную записку»), в рамках культурно-исторического дискурса. И начинается эта линия с квадратных уравнений, с Пифагора и других древних греков, и продолжается она через алгебру Древнего Востока — это, на наш взгляд, весьма поучительно узнать, что же было с математикой в первом тысячелетии нашей эры, познакомиться с примечательными ее деятелями, от аль-Хорезми до Омара Хайяма (который должен быть «прославлен в веках» не только как великий поэт, но и как великий математик, видевший будущее математики даже до времен Декарта и еще на 200 лет вперед!), от Абу Камиля до Альгазена... И дальше идет дорога через Фибоначчи до Луки Пачоли, который утверждает, что кубические уравнения решить нельзя... А дальше фейерверк первой половины XVI в.: кубические уравнения поддались математикам, а с ними и уравнения четвертой степени!

Это первые три параграфа главы 1. Следующие три параграфа нацелены на «вершину» школьной алгебры — на теорему Виета. Она в каком-то смысле столь же проста для уравнений (многочленов) произвольной степени, сколь и для уравнений квадратных. Чтобы показать это, приходится нарушить «естественный ход истории математики» и перескочить из XVI в. в XVIII: в XVI в. хорошо умели делать то, что научились и хорошо объяснять в веке XVIII (вспомните, что писал Борхес по этому поводу — см. «Пояснительную записку» к программе). Речь идет о теореме Безу; до 1970-х гг. она входила даже в основной курс для старших классов, и мы в двух параграфах реабилитируем ее в полной мере. Основное следствие — возможность разложения: $p(x)=(x-\alpha)q(x) \Longleftrightarrow p(\alpha)=0$.

Раз возникнув, разложения тянут за собой метод разложения решения рациональных алгебраических уравнений — отысканием рациональных корней и методом неопределенных коэффициентов (заметим: в том и другом случаях мы как бы следуем Декарту). Это и теоретический, и важный утилитарный вопрос или метод. Отметим, что еще раньше, в начале главы, затрагиваются два других «кита»-метода, на которых стоит основная методика решения рациональных алгебраических уравнений: метод замены (на примере линейной замены $x=z+\alpha$) и метод сведения уравнения к системе (применяющийся при выводе формулы Кардано).

Тут уже близка и теорема Виета, которую удобно формулировать сразу в общем случае полностью разложимых многочленов — представимых как $p_n(x)=x^n+...=(x-x_1)...(x-x_n)$. Мы стараемся получить максимум из этой теоремы, включая формулу бинома Ньютона и треугольник Паскаля как легкое приложение-«приключение» с алгоритмом Руффини—Горнера деления многочлена на двучлен! Однако саму теорему Виета и связанные с ней вопросы мы выделили в отдельный и весьма пространный параграф, где связали ее с комбинаторикой перестановок (перестановок корней, от которых, вообще-то, путь к теории Галуа) и сочетаний. Этот параграф помечен как дополнительный и предназначен, по замыслу, для самостоятельной его проработки продвинутыми или преуспевающими учащимися. Впрочем, учитель может включить этот параграф (§ 1.7*) и в основные занятия, потратив на него запланированные 10 часов (уроков) резервного времени.

Дойдя до «вершины школьной алгебры» в виде теоремы Виета, мы останавливаемся на этом пути, ибо далее уже нужно вести речь о комплексных числах и об основной теореме алгебры (о существовании комплексного корня или о полной разложимости любого полинома над полем комплексных чисел C). Мы здесь останавливаемся по двум причинам: во-первых, этот путь удаляет нас от нынешней школьной тематики (хотя комплексные числа, равно как и теорема Безу, входили до 1970-х гг. в основную тематику); во-вторых, сами комплексные числа (необходимость «реабилитации» которых при профильном обучении математике, на наш взгляд, очевидна) лучше всего ложатся в другую «колею» — в линию развития понятия числа и алгебраических числовых структур. А эта линия, вместе с линией развития понятия функции и элементарной функции, входит в планируемую часть II элективного курса.

Другое ответвление от главы 1 учебного пособия — анализ вопроса о разрешимости уравнений в радикалах. Разумеется, о самих теориях Руффини—Абеля—Галуа не может быть и речи, однако и рассказ об этих математиках и их творчестве без подкрепления хотя бы комплексными числами (основной теоремой алгебры) довольно бессмыслен, и мы его оставляем «на будущее». Однако что гораздо больше значит для понимания поставленного выше вопроса о разрешимости уравнений в радикалах — это приводимый далее пример неразрешимости задачи на построение циркулем и линейкой, т.е. неразрешимости уравнения в квадратных радикалах. Поскольку для уравнений низших степеней 3 и 4 критерий разрешимости (неразрешимости) был дан Декартом в его «Геометрии» (впрочем, задолго до него нечто в том же роде высказал Омар Хайям), такой пример естественно «выскакивает» (это невозможность удвоения куба) при рассмотрении декартовой алгебры и алгебраической теории геометрических построений циркулем и линейкой, логично включающейся в тематику главы 2 учебного пособия (заметим, что тема геометрических построений имеет значительное утилитарное значение: во-первых, повторяется, а значит, закрепляется уже пройденное в курсе геометрии основной школы; во-вторых, это повторение может быть направлено на подготовку к грядущим вступительным экзаменам, на которых эта тема весьма популярна).

Переходя к тематике главы 2, прежде всего укажем на ее «эклектичность» — или, точнее, многоплановость, или большее, по сравнению с главой 1, разнообразие по вводимым понятиям и привлекаемым методам. Здесь нет какой-то единой линии — три параграфа объединены только тем, что их основными фигурантами являются трое крупнейших ученых, явившихся непосредственными предшественниками тогда еще только зарождавшегося математического анализа: это Галилео Галилей, Рене Декарт, Пьер Ферма. В главе 2 убедительно, на наш взгляд, развенчивается популярный миф о том, что Декарт придумал «декартову систему координат», — здесь куда больше вклад Ферма. И напротив, Декарту воздается сполна за его революционные заслуги в создании настоящей алгебры, которую сам он предпочитал называть «всеобщей математикой» (напомним: математика тогда, да и много позже, именовалась геометрией; лишь постепенно обрела права арифметика, а потом и алгебра).

В § 2.1 говорится о начале «новой науки» — у Галилея снаряд летит уже по параболе, скорость падения не зависит от массы тела, нельзя установить, двигаетесь ли вы равномерно и прямолинейно или покоитесь... Декарт вводит единичный отрезок, обозначения для степеней, впервые записывает уравнения практически в современном виде и строит их корни, пока только положительные, исходя из алгебраических формул... Прогресс огромный, а ведь еще не так давно витийствовал (так и хочется сказать «виетствовал») «галльский Аполлоний» Франсуа Виет.

В § 2.2 объясняется, наконец, кто же и когда придумал координаты. Мы возвращаемся к настоящему Аполлонию (в III в. до н.э.), легко получаем из алгебраических уравнений (некоторые) свойства конических сечений, учимся преобразовывать координаты. И уж заодно привязываем к системе координат построения циркулем и линейкой, запросто расправляемся (в теории запросто!) — видимо, вслед за Виетом — с задачей Аполлония о построении окружности, касающейся трех данных. Тут же находим критерий построимости, скажем, числа или отрезка — здесь мы уже следуем, наверное, Гауссу (1799) или Вантцелю (1837; вот такой диапазон во времени: от 1637 до 1837!). При этом приходится оперировать якобы с новым, но не так уж и не знакомым понятием числового поля, а заодно — квадратичного расширения поля. Мы считаем, что эти понятия полезно ввести не только потому, что они помогают доказать невозможность удвоения куба и трисекции угла (конкретно в 60°), но и для того, чтобы встряхнулось наше косное логическое левополушарное мышление...

И вот в последнем параграфе 2.3 всплывает, наконец, первое понятие, относящееся по своей сути не к алгебре или геометрии, а к математическому анализу, — понятие наибольшего/наименьшего значения. Сначала оно плавает в историческом «бульоне» диоризма (так называются условия существования решений какого-то уравнения), т.е. не отделяется от алгебры. Шажок в сторону анализа делает Иоганн Кеплер со своей знаменитой наилучшей австрийской бочкой... А дальше «вступает в игру» Пьер Ферма, придумавший «метод отыскания наибольших и наименьших значений», от которого всего шага два до методов собственно математического анализа.

В этом же последнем параграфе затрагивается принципиально важный «принцип Ферма» в оптике и его работы в области теории чисел, в которой он был революционером не меньшим, чем его соперник Декарт в алгебре.

Взаимодействие математиков Европы, а особенно Франции, было бы труднодостижимо (а такое взаимодействие ученых как тогда, так и в настоящее время есть залог прогресса в математике), если бы не скромный монах-францисканец Марен Мерсенн, организовавший в своей келье в центре Парижа чуть ли не академию наук. Его кружок и стал основой будущей Парижской академии — с постепенным образованием академий и в других странах начался новый этап в развитии наук, и в частности математики. Об этом и говорится в последнем пункте последнего параграфа.

За пределами главы 2 и первой части элективного курса остались некоторые из предтеч математического анализа — такие, как гениальный Блез Паскаль (1623—1662), систематизатор Джон Валлис (1616—1703), замечательный универсал и первый президент Парижской академии Христиан Гюйгенс (1629—1695). Их время и их работы еще ближе к математическому анализу, и мы отнесем соответствующие материалы в часть III элективного курса. То же относится и к еще одному достижению Ферма и Декарта, ставшему предметом перепалки между ними (через посредство Мерсенна!) — имеется в виду метод построения касательной к более-менее произвольной кривой. Этот вопрос лежит, скорее, уже внутри математического анализа.

Относительно домашних заданий, задач и упражнений для самостоятельной работы мы полагаем, что при изучении данного элективного курса специальные домашние задания «на закрепление материала», включающие какие-то вопросы, упражнения, задачи и задания, не нужны. Задания могут состоять в подробном прочтении соответствующих текстов и в их личной интерпретации, в составлении собственного краткого конспекта пройденного, в котором выделяется «базисное» математическое содержание — например, преобразования выражений, примеров которых в учебном пособии довольно много. Следует отметить, что почти все эти примеры принадлежат крупным математикам своего времени, и проводимые ими преобразования далеко не тривиальны, хотя и могут показаться такими на первый взгляд (тем более, когда их преподносит учитель). Напротив, они часто остроумные, не очевидные (а ныне школьники поневоле приучаются ко многим очевидным по своей сути преобразованиям, да и вообще маловато в них практикуются), довольно изощренные. Разобраться с ними (например, с различными методами вывода формулы Кардано или способами разложения уравнений степени 4 «по Феррари» и «по Декарту») до уровня самостоятельного воспроизведения — это достойное домашнее задание, отвечающее дидактическим целям курса.

Параллельно конспектируется и гуманитарное содержание — с выделением самого главного. Можно предложить учащимся составить и постепенно пополнять хронологическую «карту» или «ось времени», на которой отмечать годы жизни ученых и важнейшие датированные математические факты — от открытий до, например, введения тех или иных понятий или обозначений. Примечательные очень подробные хронологические перечни и карты можно найти на очень хорошем шотландском сайте по истории математики и математиков www.history.mcs.st-and.ac.uk (конечно, на английском языке).

Несмотря на рекомендацию воздержаться от специальных домашних заданий и ограничиться заданиями типа проработать пройденный материал и повторить известный материал основного или профильного курсов, с тем чтобы легче и эффективнее усваивать следующую тему, к той и другой главе даются «Упражнения, задачи и задания». Их предназначение — отнюдь не усугубление нагрузки учащихся. Они даются, во-первых, с тем чтобы преуспевающим ученикам «дать пищу уму» (при необходимости), во-вторых, чтобы можно было всем ученикам воспользоваться некоторым набором задач и упражнений утилитарной, экзаменационной, конкурсной направленности. Например, как уже говорилось, в главе 1 рассмотрены основные методы решения рациональных алгебраических уравнений: замена (линейная), разложение, сведение к системам. И в «Упражнениях» к этой главе дан небольшой список уравнений, решаемых этими методами. То же относится к задачам на построение алгебраическим методом и на метод координат (для отыскания геометрических мест точек), помещенным в «Упражнениях» к главе 2.

К некоторым задачам, заданиям (под заданиями мы понимаем цепочки или циклы связанных одна с другой задач), упражнениям в данном методическом пособии даны краткие указания, комментарии, а в некоторых случаях — полные решения, помещенные после комментариев к параграфам.

Рекомендуемая литература

Адлер А. Теория геометрических построений: Пер. с нем. — Одесса: Матезис, 1924.

Александрова Н.В. Математические термины: Справочник. — М.: Высшая школа, 1978.

Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. — М.: Наука, 1972.

Белл Э.Т. Творцы математики: Пособие для учителей: Пер. с англ. — М.: Просвещение, 1979.

Боголюбов А.Н. Математики: Механики: Биографический справочник. — Киев: Наукова думка, 1983.

Бородин А.И., Бугай А.С. Выдающиеся математики: Биографический словарь-справочник. — Киев: Рад школа, 1987.

Бурбакин Н. Очерки по истории математики: Пер. с франц. — М.: ИЛ, 1963.

Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука: Математики Древнего Египта, Вавилона и Греции: Пер. с нем. — М.: Физматгиз, 1959.

Вейль Г. Математическое мышление: Пер. с англ. и нем. — М.: Наука, 1989.

Вигнер Е. Этюды о симметрии: Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.

Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия: Пер. с нем. — М.: Наука, 1966.

Вопросы преподавания математики на XIX международной конференции в Женеве. — В сб. Математическое просвещение, вып.1. — М.: Физматгиз, 1957.

Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. — М.: Наука, 1985.

Глейзер Г.И. История математики в школе: Пособие для учителей. — М.: Просвещение (IV—VI классы — 1981; VII—VIII классы — 1982; IX—X классы — 1983).

Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты: Очерки по истории математики: Пер. с франц. — М.: Мир, 1986.

Декарт Р. Геометрия: С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта: Пер. с франц. и лат. — М.;Л.: ГОНТИ, 1938.

Декарт Р. Рассуждение о методе: С приложениями: Диоптрика, Метеоры, Геометрия: Пер. с франц. — Л.: Гостехиздат, 1953.

Демидов С.С. У истоков современной алгебры. — М.: Знание, 1971.

Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов: Пер. с лат. — М.: Мысль, 1986.

Жмудь Л.Я. Пифагор и его школа. — Л.: Наука, 1990.

История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А.П. Юшкевича. — М.: Наука, 1970 (Т.I: С древнейших времен до начала нового времени; Т.II: Математика XVII столетия; Т.III: Математика XVIII столетия).

Кеджори Ф. История элементарной математики: Пер. с англ. — Одесса: Матезис, 1917.

Клайн М. Математика: Утрата определенности: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984.

Клайн М. Математика: Поиск истины: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988.

Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. — М.: Наука, 1991.

Кольман Э. История математики в древности. — М.: Физматгиз, 1961.

Кузнецов Б.Г. История философии для физиков и математиков. — М.: Наука, 1974.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика?: Элементарный очерк идей и методов: Пер. с. англ. — М.: Просвещение, 1967; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001; М.: МЦНМО, 2001 (3-е изд., испр. и доп.).

Матвиевская Г.П. Рене Декарт: Книга для учащихся. — М.: Просвещение, 1987.

Матвиевская Г.П. Альбрехт Дюрер — ученый. — М.: Наука, 1987.

Матвиевская Г.П. Рамус. — М.: Наука, 1981.

Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: Большая российская энциклопедия, 1995.

Нейгебауер О. Точные науки в древности: Пер. с англ. — М.: Наука, 1968.

Никифоровский В.А. Из истории алгебры XVI—XVII вв. — М.: Наука, 1979.

Пуанкаре А. О науке: Пер. с франц. — М.: Наука, 1990.

Рыбников К.А. Возникновение и развитие математической науки: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1987.

Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики: Пер. с нем. — М.: Наука, 1984.

Уайтхед А.Н. Избранные работы по философии: Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1990.

Фрейман Л.С. Творцы высшей математики. — М.: Наука, 1968.

Хрестоматия по истории математики / Под ред. А.П. Юшкевича. — М.: Просвещение, 1976.

Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века: Пер. с нем. — М.;Л.: ГОНТИ, 1938.

Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII веках: Пер. с нем. — М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

Энциклопедия элементарной математики / Под ред. П.С. Александрова, А.И. Маркушевича и А.Я. Хинчина. (Кн.I: Арифметика. — М.;Л.: ГИТТЛ, 1951; Кн.II: Алгебра. — М.;Л.: ГИТТЛ, 1951; Кн.III: Функции и пределы. — М.;Л.: ГИТТЛ, 1952; Кн.IV: Геометрия. — М.: Физматгиз, 1963; Кн.V: Геометрия. — М.: Наука, 1966).

Юшкевич А.П. История математики в средние века. — М.: Физматгиз, 1961.

МАТЕМАТИКА В АРХИТЕКТУРЕ

Н.Л. Стефанова,
д-р пед. наук, профессор, декан
факультета математики
РГПУ им. А.И.Герцена

Курс «Математика в архитектуре» является элективным (курсом по выбору учащихся). Он создан для реализации в классах гуманитарного профиля, учащиеся которых ориентированы на углубленное изучение истории, литературы, языков, искусства и других областей гуманитарного знания. При этом абсолютное большинство учащихся имеют крайне низкий уровень интереса и мотивации к изучению математики. Поэтому главным основанием для создания «математического» элективного курса для гуманитариев было желание изменить отношение этих учащихся к математике.

Ведущий подход, который был использован при разработке курса, можно выразить в таком лозунге — «С математикой — к ученику посредством раскрытия ее с неожиданной стороны». В качестве ракурса показа математики с неожиданной стороны был избран вопрос о проникновении математики в искусство.

Во-первых, учащимся может показаться парадоксальным связывать эти столь далекие области знаний, и уже это несоответствие может разбудить интерес. Во-вторых, разговор об искусстве (точнее, об одном из его наиболее доступных видов), скорее всего, лежит в русле их познавательных интересов. В-третьих, содержание курса, которое видно из названия, возможно, вызовет желание расширить свой общий кругозор.

Приведенное в самых общих словах описание авторского замысла очень важно понять учителю математики, который возьмется за реализацию столь необычного для него курса.

Пояснительная записка

Предлагаемый элективный курс предназначен для реализации в старших классах школ гуманитарного профиля. Именно поэтому в нем математика подается как элемент общей культуры человечества, который является теоретической основой искусства (на примере архитектурного искусства), а также элемент общей культуры отдельного человека, который хотел бы, например, понять внутренние законы гармонии и красоты. При этом курс рассчитан на базовый уровень владения весьма ограниченным математическим содержанием (различные геометрические фигуры, симметрия, простейшие алгебраические преобразования и правила выполнения арифметических действий). С другой стороны, он предполагает наличие самых общих представлений из области архитектуры.

Цель курса состоит в формировании представления о математике как теоретической базе создания произведений архитектурного искусства.

Конкретные ***задачи курса*** состоят в следующем:

- расширить представления учащихся о сферах применения математики (не только в естественных науках, но и в такой области гуманитарной сферы деятельности, как искусство);
- убедить в практической необходимости владения способами выполнения математических действий (на примере отдельных компонентов процесса проектирования сооружений);
- расширить сферу математических знаний учащихся (пространственные фигуры, виды симметрии, аналитическое и геометрическое представление о золотой пропорции);
- расширить общекультурный кругозор учащихся посредством знакомства их с лучшими образцами произведений архитектуры;
- сформировать представления учащихся об объективности математических отношений, проявляющихся в архитектуре как в одной из форм отражения реальной действительности.

Решение выделенных задач станет дополнительным фактором формирования положительной мотивации в изучении математики, а также понимания учащимися философского постулата о единстве мира и осознания положения об универсальности математических знаний.

Предлагаемый элективный курс соответствует:

- современным целям общего образования;
- основным положениям концепции профильной школы;
- перспективным целям математического образования в школе гуманитарного профиля.

Доминантной формой учения является поисково-исследовательская деятельность, которая представляется основной формой и средством как убеждения учащихся в справедливости определенных суждений, связанных с использованием математики в архитектуре, так и получения новых фактов.

На изучение курса целесообразно отвести 28 аудиторных (академических) часов, распределив аудиторную нагрузку по темам следующим образом:

1. Сущность архитектуры как отрасли инженерных знаний и искусства. Роль математики в архитектуре — 6 ч.

2. Геометрические фигуры в архитектурных сооружениях: разнообразие, назначение — 6 ч.

3. Различные виды симметрии в архитектуре — 4 ч.

4. Пропорциональность — математическая основа архитектурной композиции — 10 ч.

5. Защита проектов, подготовленных учащимися, — 2 ч.

Учащиеся в ходе освоения данного элективного курса имеют возможность познакомиться с научно-популярной литературой по проблеме взаимосвязи математики и архитектуры; провести самостоятельный поиск информации, необходимой для подтверждения или опровержения фактов; получить дополнительную информацию из материалов, которые либо входят в учебное пособие к курсу (справочные материалы), либо могут рассматриваться как сопровождающие курс (художественные альбомы, видеоматериалы, информация Интернета); провести небольшое самостоятельное исследование (индивидуально или в группе).

Средствами для осуществления этой работы являются задания для учащихся, которые предлагаются в учебном пособии, а также тематика исследовательских проектов на выбор учащихся (под общим девизом — «Математические секреты архитектурных сооружений»).

Каждый исследовательский проект может состоять в изучении конкретного архитектурного сооружения или ансамбля с точки зрения различных математических моделей (геометрических, арифметических), которые использовались при его создании.

Главная цель работы учащихся над проектом — осознание действительного использования элементов математического знания при проектировании архитектурных памятников и современных сооружений, а также понимание связи их эстетических качеств с использованием определенных математических закономерностей, которые рассматривались в данном курсе.

Достижение этой цели возможно только в ходе самостоятельной деятельности учащихся по выполнению избранного ими проекта.

При рассмотрении избранного учащимися для исследования сооружения или ансамбля целесообразно изучить следующие вопросы:

- Определение архитектурного стиля, к которому принадлежит произведение архитектуры.

- Использование различных (каких?) геометрических форм при создании архитектурного проекта.
- Использование различных видов симметрии в рассматриваемом сооружении.
- Числовые закономерности в размерах сооружения и его частей.
- Необязательным, но возможным является установление материалов, из которых выполнено сооружение, а также проведение некоторых расчетов, которые определяют его прочность.

При этом учащимся предстоит осуществить:

— поиск необходимой информации, связанной с сугубо архитектурными характеристиками избранного сооружения, особенностей архитектурного стиля, к которому оно относится, возможно, исторических сведений и интересных фактов, связанных с его проектированием и построением, а также его размерами;

— отбор информации, выделение в ней главного и второстепенного; соотнесение со сведениями, полученными на занятиях в рамках предложенного курса; получение фактов, характеризующих использование математических знаний при создании рассматриваемого сооружения;

— представление результатов исследования (текстовое или компьютерное представление) с использованием наглядной информации (фотографии, видеофрагменты, иллюстрации, чертежи, математические выкладки и др.).

Учитывая сложность и разнообразие задач, которые должны решить учащиеся в ходе выполнения исследования, каждый проект целесообразно выполнять группой учащихся, состоящей из 3—4 человек.

Основное содержание курса

Общая схема представления содержания курса может выглядеть следующим образом: **архитектура** как объединение инженерной науки и искусства → **математика** в инженерной составляющей архитектурного творчества (обзорно) → **математика** в архитектуре как искусстве (подробно) → **произведения архитектуры** как соединение математических знаний и художественного творчества (результаты выполнения проектов).

Более подробно содержание курса можно представить следующим образом.

Сущность архитектуры как отрасли инженерных знаний и искусства. Роль математики в архитектуре

Архитектура как соединение прочности, пользы и красоты. Инженерная и художественная составляющие архитектуры. Роль математических расчетов в выборе материалов и архитектурной формы. Как математика обеспечивает удобство? Математика и законы красоты в архитектуре.

В связи с тем что целевая установка курса связана с соединением имеющихся знаний и представлений учащихся (из области математики и искусства), целесообразно начинать изучение каждого раздела с предложения учащимся диагностических вопросов. Ответы на эти вопросы позволят самим учащимся актуализировать базовые понятия, которые будут использоваться в этом разделе, и оценить степень готовности к его изучению. При изучении содержания первого раздела целесообразно использовать лекционную форму работы с элементами видеоэкскурсии. Возможна организация мастерской на тему «Экспертиза», в которой учащимся в группах предстоит оценить прочность описанного в предложенном задании сооружения. На заключительном этапе можно рекомендовать провести заседание круглого стола на тему «Математика в архитектурной науке и искусстве».

Геометрические фигуры в архитектурных сооружениях: разнообразие, назначение

Геометрические фигуры как прообразы архитектурных форм и как их модели. Геометрические фигуры в различных архитектурных стилях. Геометрические фигуры в решении проблемы прочности сооружений — геометрические модели архитектурных конструкций.

При изучении содержания этого раздела можно провести смотр знаний о свойствах известных учащимся геометрических фигур, когда каждый учащийся рассказывает о свойствах конкретной геометрической фигуры (предложенной ему для анализа). В результате собирается коллекция геометрических фигур. Другая часть работы будет посвящена анализу геометрических форм, использованных в различных архитектурных сооружениях, с целью выявления различия геометрической (абстрактной) и архитектурной (конкретной и часто комбинированной) формы. Наконец. в ходе лекционной работы с учащимися будет обсуждаться проблема выбора геометрической формы для обеспечения прочности сооружения. В ходе этой работы учащиеся познакомятся с новыми геометрическими фигурами: гиперболический параболоид, однополостный и двуполостный гиперболоид, эллипсоид.

Различные виды симметрии в архитектуре

Симметрия, антисимметрия, диссимметрия. Принцип симметрии в природе и архитектуре. Зеркальная, поворотная и переносная симметрии.

При изучении содержания этого раздела целесообразно в виде лабораторной работы провести изучение различных видов симметрии и их свойств (по существу также исследовательская работа), на основе анализа архитектурных памятников и отдельных их элементов показать возможность сочетания симметрии, асимметрии и диссимметрии в архитектурных сооружениях (с использованием иллюстративных и видеоматериалов). Предложить групповую работу по выполнению и защите мини-проекта — анализ конкретного архитектурного объекта с точки зрения присутствия в нем симметрии. Завершить изучение раздела можно в виде дискуссии на тему «Принцип симметрии в природе и архитектуре».

Пропорциональность — математическая основа архитектурной композиции

Пропорции в архитектуре. Золотая пропорция как основа пропорционального строя архитектурных шедевров. Архитектурный модуль. Антропоморфные меры. Геометрическая основа пропорционального строя в архитектуре. Модулор Ле Корбюзье — система пропорционирования архитектурной композиции.

При изучении этого раздела содержания целесообразно использовать лекционную форму занятия, практикум по изучению различных математических свойств архитектурных пропорций, элементы учебного диалога по проблеме «Пропорции в разных архитектурных стилях». В заключение можно предложить мини-проект «Пропорциональный строй конкретного архитектурного сооружения».

В качестве тем для выполнения исследовательских проектов по итогам изучения курса можно предложить следующие:

1. Храм Василия Блаженного (Москва) с точки зрения архитектора и математика.
2. Собор Парижской Богоматери (Notre Dame de Paris) — жемчужина средневековой архитектуры.
3. Исаакиевский собор Санкт-Петербурга как образец культового сооружения XIX в.
4. Церковь Вознесения в Коломенском — шедевр древнерусского зодчества.
5. Колизей (Амфитеатр Флавия)— символ могущества Древнего Рима.

6. Архитектурный комплекс Дворцовой площади (Санкт-Петербург).

7. Эйфелева башня (TOUR EIFFEL) — символ современного Парижа.

8. Самое красивое сооружение моего родного города.

9. В чем секрет архитектурной безликости? (На примере какого-либо сооружения вашего города.)

10. Гармония формы и размеров (на примере избранного вами произведения архитектуры).

Состав и структура учебно-методического комплекта

Основой для реализации элективного курса «Математика в архитектуре» является учебно-методический комплект (УМК), состоящий из учебного пособия для учащихся и методического пособия для учителя.

Учебное пособие, которое носит название «Как мера и красота скажет», включает предисловие, основной текст, справочные материалы, а также список рекомендуемой литературы.

В названии использованы слова никому не известного русского зодчего, возводившего в конце XVII в. кладбищенскую деревянную церковь в затерянном среди русских просторов селе Усть-Кулуйск. Но в них соединено то, казалось бы, на первый взгляд несоединимым, а именно мера, то, что исходит от разума, от характерного для математики знания, и красота, то, что доступно чувствам и заключено в искусстве. Соединение этих двух составляющих и приводит к появлению прекрасных образцов архитектуры.

Об этих двух составляющих, о специфике их соединения в архитектуре и говорится в учебном пособии.

Учитель должен рассматривать это пособие как основу, но не как единственный источник в своей работе по курсу. Кстати, в списке литературы, завершающем пособие, он может найти дополнительный материал.

Основное содержание учебного пособия представлено в трех главах. Глава учебного пособия содержит объяснительный текст, организованный в параграфы. Таких параграфов в каждой главе выделено три. Глава заканчивается заданиями для учащихся, охватывающими все содержание главы.

Каждая глава начинается с заданий тестового характера, предназначенных для актуализации знаний учащихся, которые могут быть приобретены ими в ходе изучения курса математики или извлечены из внеучебной деятельности (чтение литературы, посещение музеев, выставок, экскурсии, различные жизненные ситуации). Они ориентируют учащихся на содержание, которое будет представлено в главе. В дальнейшем они поясняются в основном тексте или используются при выполнении заданий.

Основной текст имеет не столько объясняющий характер, сколько выполняет ориентационную функцию. Его нужно воспринимать как своеобразный «компас» для учителя. Этот компас дает возможность учителю, с одной стороны, сформировать учебный материал для учащихся, а с другой — определить виды учебно-познавательной деятельности учащихся по его изучению. Причем деятельность учащихся, которая обусловлена предложенным содержанием, по своему характеру — поисковая, поисковая с элементами исследования или исследовательская.

Это не означает, однако, что сам текст не может использоваться учителем в работе с учащимися.

Специальными средствами, которые используются для организации учебно-познавательной деятельности учащихся, являются отсылки к справочному материалу, вопросы для размышления, небольшие задания, которые имеются в тексте. Средствами организации деятельности учащихся являются и задания, которые помещены в конце каждой главы. Их количество колеблется от 12 до 17.

Материал, который представлен в тексте учебного пособия, охватывает предметные знания не только из областей математики и архитектуры, но и истории, философии, искусства и др. При этом в объяснительном тексте сделана попытка представить эти знания интегрированно.

Этот же подход, хотя и не в такой мере, реализован в заданиях для учащихся. Среди предложенных заданий есть чисто математические задачи. Но есть и достаточное количество задач, для решения которых необходимо использовать знания как из математики, так и архитектуры в интегрированном виде. Эти задачи в основном имеют исследовательский характер.

В справочных материалах представлен справочник и небольшой словарь. В справочнике приводятся сведения из области математики и архитектуры, которые могут пригодиться для понимания объяснительного текста. В словаре (его можно назвать кратким терминологическим словарем) даются этимология и толкование некоторых терминов, которые встречаются в тексте пособия.

Оба вида справочных материалов предназначены для организации самостоятельной деятельности учащихся и непосредственно связаны с текстом. Другими словами, используя эти материалы, можно получить ответы практически на все вопросы, которые имеются в тексте. Однако для выполнения творческих заданий, а особенно исследовательских проектов, их будет недостаточно. Дополнительную информацию учащиеся могут найти в рекомендованной к курсу литературе. Кроме этого, они могут почерпнуть необходимые сведения, используя ресурс Интернета, а также другие источники информации, наконец, имеющийся жизненный опыт.

В последнем разделе учебного пособия представлен список рекомендованной литературы, которая подразделяется на основную и дополнительную. Список не является очень обширным, поскольку и объем предлагаемого курса не слишком велик.

Методическое пособие для учителя включает предисловие и два раздела. В первом разделе представлены общие вопросы реализации элективного курса, во втором — методические комментарии по его реализации.

В первом разделе разъясняются роль курса в подготовке учащихся классов гуманитарного профиля и методические идеи, которые обусловили отбор содержания, построение и этапность в реализации курса. В частности, предлагается выделить вводный, основной и заключительный этапы. Раскрываются цели и задачи курса; его содержание и особенности учебного пособия; подходы и формы организации деятельности учащихся; ожидаемые результаты и способы оценивания работы учащихся.

Во втором разделе даются методические комментарии по организации вводного (начало курса), основного и заключительного этапов изучения данного элективного курса. При этом поясняются цели и задачи каждого этапа и приводится возможный вариант работы с учащимися.

Основное внимание уделяется методическим рекомендациям по работе с учащимися на основном этапе. Даются комментарии по наиболее существенным, с точки зрения автора, моментам, относящимся к содержанию, включенному в каждый параграф пособия для учащихся, а также приводятся возможные варианты организации деятельности учащихся при работе с этим содержанием. Отдельно приводятся комментарии по выполнению заданий, предназначенных для самостоятельной работы учащихся.

Однако в пособии не приводится детальной разработки занятий и жестких указаний учителю. Несмотря на все трудности, которые может встретить учитель на пути реализации такого курса, кажется, что слишком подробные рекомендации здесь не совсем уместны. Во-первых, сам характер необязательности и определенной гибкости элективных курсов предполагает достаточную степень свободы не только учащихся, но и учителя. Во-вторых, сам факт выбора этого курса учителем свидетельствует о его заинтересованности и склонности к реализации курсов, выходящих за пределы своего основного предметного поля — математики. В-третьих, реализация учителем математики не только элективных, но и базового курса в классах гуманитарного профиля сегодня требует повышения его квалификации в любой из доступных ему форм, что не может покрыть никакое методическое пособие. Наконец, не исключается и возможность взаимодействия учителя математики с учителями искусства и истории при реализации таких курсов, которые выходят за рамки одного предметного поля.

Организация и проведение аттестации учеников

Целью аттестации по данному элективному курсу является констатация личных достижений учащихся по освоению содержания, а также качественная оценка самостоятельно выполненных проектов, которые могут быть индивидуальными или коллективными.

Обсуждение результатов выполнения проекта желательно проводить во время публичной защиты, куда могут быть приглашены и не изучавшие данный курс учащиеся, например более младшего класса. Это может иметь не только познавательный, но и мотивационный эффект.

При обсуждении результатов проекта целесообразно обратить внимание на то, какие задачи (проблемы) ставили перед собой группа или отдельный ученик и решены ли они полностью или частично; каков был вклад каждого участника в работу группы (что он сделал); какого качества материалы, подготовленные группой или учеником. Оценку проекта целесообразно провести качественно.

При качественной оценке может быть выстроена определенная иерархия выполненных проектов. Можно говорить о выделении самого удачного проекта в отдельных номинациях (например, глубина и новизна полученных фактов; структурность и логичность изложения материала; яркость и живость представления; слаженность работы группы) или в целом.

Среди основных показателей при оценивании проектов можно выделить:

— корректность (с точки зрения математики и архитектуры) полученных фактов;

— обоснованность фактов;

— логичность изложения;

— широта использованных источников при проведении исследования;

— яркость изложения и удачное представление проекта.

Список рекомендуемой литературы

1. Обязательная литература

Волошинов А.В. Математика и искусство. — М.: Просвещение, 2000.

Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение. — М.: Стройиздат, 1990.

Васютинский Н. Золотая пропорция. — М.: Молодая гвардия, 1990.

Смолина Н.И. Традиции симметрии в архитектуре. — М.: Стройиздат, 1990.

Бартенев И.А. Формула и конструкция в архитектуре. — Л.: Стройиздат,1968.

2. Дополнительная литература

Книга «Архитектура» из серии «Домашний музей».

Художественные альбомы по архитектуре.

Зиновьев А.В., Зиновьев А.А. Логос египетских пирамид. — Владимир, 1999.

Иконников А.В. Художественный язык архитектуры. — М.: Искусство, 1985.

Коуэн Г.Дж. Мастера строительного искусства. — М.: Стройиздат, 1982.

Искусство и история. Барселона — город Гауди.— М., 2000.

Калязин Н.В., Дорофеева Л.П., Михайлов Г.В. Дворец Меншикова. — М.,1986.

Пифагор и его школа. — М.: Наука, 1995.

Памятники архитектуры пригородов Петербурга. — Л., 1983.

Справочники по архитектуре.

Фрагменты учебного пособия для учащихся

Для более четкого представления об особенностях учебного пособия для учащихся приведем примеры его структурных компонентов.

ВВОДНЫЙ ТЕСТ, С КОТОРОГО НАЧИНАЕТСЯ ГЛАВА 3

Проверь себя!

• Что означает понятие ***«соразмерность»***?

A. Связь размеров
B. Пропорциональность размеров
C. Сравнение размеров
D. Уменьшение размеров

• Какое из перечисленных ниже слов используется для обозначения ***архитектурного стиля***?

A. Сирокко
B. Мокко
C. Марокко
D. Барокко

• Какое из следующих математических выражений называется ***пропорцией***?

A. $(x - 8) \cdot x = 0$
B. $a + в = в + a$
C. $8 : 4 = 82 : 41$
D. $x : 1 = 2 : x$

• Какие из чисел 5, 8, 12 и 24 ***кратны*** друг другу?

A. 5 и 8
B. 30 и 5
C. 12 и 8
D. 24 и 8

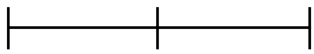
• Какие из приведенных ниже чисел являются ***рациональными***?

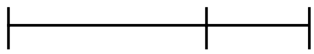
A. 15
B. $\sqrt{2}$
C. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$
D. $\frac{1}{7}$

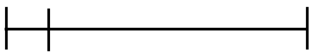
• Какая из приведенных ниже ***мер***, полученных путем соотнесения с размерами тела человека, ближе к 2 м?

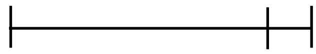
A. Косая сажень
B. Пядь
C. Шаг
D. Маховая сажень

• На каком из приведенных ниже чертежей отрезок разделен в отношении, похожем на отношение всего отрезка к большей его части?

A. 

B. 

C. 

D. 

Следующим примером является текст одного из параграфов этой же главы.

§ 3.2. ЗОЛОТАЯ ПРОПОРЦИЯ — ДРАГОЦЕННАЯ НАХОДКА АРХИТЕКТУРЫ

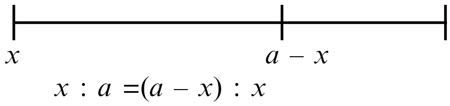
Золотая пропорция стала настоящим открытием архитектуры и искусства в целом эпохи Возрождения.

Вслед за Лукой Пачоли теоретики искусства Возрождения возводят принцип пропорции в основной принцип эстетики. Он особое значение в скульптуре и архитектуре придавал так называемой «золотой пропорции», которую именовал «божественной». В своем знаменитом трактате «О божественной пропорции» (1509 г.) он писал, что пропорциональность является основой архитектурных сооружений, она заложена в размеры человеческого тела и даже букв алфавита. Он утверждает, что пропорции существуют всюду: в математике и в механике, в медицине, в географии и во всех науках и ремеслах. Особую роль «божественная пропорция» играет в искусстве. Здесь она «мать-царица», т.е. порождает его и правит им (удачный выбор пропорций в произведении искусства делает его шедевром). Без нее невозможно создание архитектурного проекта.

Леонардо да Винчи, который сделал иллюстрации к книге Пачоли, называл ее *золотым сечением.*

Однако пропорция золотого сечения была известна людям задолго до эпохи Возрождения. Ее знали в Древнем Египте и Древней Греции (в частности, ее можно найти в трудах Пифагора и Евклида).

Почему же эту пропорцию называли сечением? Связано это с тем, что она возникла из геометрических соображений — деления отрезка на две части. Посмотрите на рисунок, изображенный ниже, и поясняющие записи к нему и объясните, как проведено это деление.



$$x : a = (a - x) : x$$

Если вы не уверены, что правильно поняли правило деления отрезка в ***золотой пропорции***, то загляните в ***справочник.***

Попробуем установить теперь числовое выражение отношения, которое заложено в этой пропорции, для чего необходимо воспользоваться основным свойством пропорции и решить полученное квадратное уравнение относительно *x*.

Попробуйте проделать это самостоятельно

Поскольку речь у нас идет об отношении длин отрезков, то нас будет интересовать только положительный корень этого уравнения:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, a \approx 0{,}618\ a.$$

Другими словами, большая часть отрезка при золотом сечении относится ко всему отрезку приближенно как 0,6. Это же отношение сохраняется между меньшей и большей частями деления.

Заметим, что, число, обозначающее это отношение $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

называют коэффициентом золотого сечения и обозначают буквой φ.

Убедитесь, что полученное число является положительным корнем уравнения $\varphi^2 + \varphi = 1$. Подумайте, как это уравнение можно получить из квадратного уравнения, которое вы решали, относительно x^2.

Обратное же отношение (обозначим его Φ), т.е. отношение всего отрезка к большей его части, равное отношению большей части отрезка к меньшей, выражается числом

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$$

Составьте отношение, обратное φ. Выполнив преобразования, убедитесь, что у вас получится указанное выше число.

При этом целесообразно проделать те же действия, которые вы выполняли при нахождении коэффициента золотого сечения, и убедиться, что коэффициент, обратный коэффициенту золотого сечения, т.е. Φ, является положительным корнем уравнения $\Phi^2 - \Phi = 1$.

Нужно еще заметить, что из степеней коэффициентов φ и Φ можно построить ряд ... φ^3, φ^2, φ, 1, Φ, Φ^2, Φ^3, ..., или, что то же самое ... Φ^{-3}, Φ^{-2}, Φ, 1, Φ, Φ^2, Φ^3... . Его называют рядом золотого сечения.

Именно золотое сечение является той связующей пропорцией, которая используется при определении размеров многих архитектурных сооружений.

Попробуем убедиться в этом. Рассмотрим чертеж храма Василия Блаженного в Москве (храма Покрова на Рву, как он назывался при его создании), на котором обозначен пропорциональный строй его размеров. Последняя фраза означает, что на чертеже показаны не сами размеры, а их отношение.

Так, вся высота собора принята за 1. Тогда размер храма от фундамента до основания шатра центральной церкви составляет от 1 число, равное коэффициенту золотого сечения — φ. Высота оставшейся части шатра до верхней точки креста равна φ^2. Поэтому $\varphi + \varphi^2 = 1$.

Убедитесь, что это действительно так, используя значение φ.

Остальные размеры определяются также последовательными степенями коэффициента φ: $1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \ldots$ и свойством $\varphi^2 + \varphi^3 = \varphi$ и т.д.

Кстати, именно свойство получения предыдущей степени в ряду степеней коэффициента φ золотого сечения при сложении двух последующих степеней (оно называется свойством аддитивности или сложения) обеспечивает соединение целого и частей в этом архитектурном памятнике.

Это свойство является отражением известной в математике последовательности чисел, которые называются *числами Фибоначчи.*

Информацию об этих числах и их авторе вы можете найти в справочных материалах.

Если же рассмотреть ряд коэффициентов Φ золотого сечения: $1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \ldots$, то они будут обладать свойством ряда чисел Фибоначчи.

Самое удивительное, что золотое сечение использовали при сооружении своих произведений архитекторы, жившие не только в разных странах, но относящиеся к разным историческим эпохам и даже цивилизациям. Его можно найти в размерах усыпальницы фараона Хеопса в Древнем Египте (знаменитой пирамиде Хеопса), в храме Парфенон Древней Греции, в Баптистерии эпохи Возрождения в Пизе, в храме Покрова на Нерли, в здании Адмиралтейства в Санкт-Петербурге и многих других памятниках.

В чем же секрет этого явления? Можно предположить, что секрет этот заложен в самом человеке, в тех пропорциях, которым подчинено его тело. Известно, что было проведено исследование строения тела многих тысяч людей, в результате которого удалось выяснить, что талия делит тело взрослого мужчины в отношении, равном 1,625, а взрослой женщины — в отношении 1,6. Как мы видим это очень близко к значению коэффициента золотого сечения Φ. И в связи с этим человек интуитивно воспринимает эту пропорцию в качестве эталона красоты.

Можно только еще раз согласиться с древним философом, который утверждал, что человек — мера всех вещей.

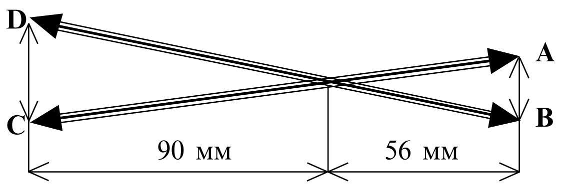
Много интересных фактов о золотом сечении вы можете найти на страницах книг А.В. Волошинова «Математика и искусство», Н.А. Васютинского «Золотая пропорция», И.Ш. Шевелева и др. «Золотое сечение».

Наконец приведем примеры заданий для учащихся, содержательно связанных с материалом приведенного параграфа, и методические комментарии к их решению.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

1. Отрезок, длина которого равна a, разделен на две части, большая из которых равна x. При этом деление произведено в золотом сечении. Найдите число, которое показывает отношение меньшей его части к большей — *коэффициент золотого сечения* φ.

2. При проектировании и сооружении зданий архитекторы пользовались специальными инструментами: эталонными палками, мерными циркулями и др. В Национальном музее в Неаполе выставлен пропорциональный циркуль, найденный при раскопках Помпей, — необходимый архитектору инструмент (его схематическое изображение приведено ниже). С помощью этого циркуля можно было получать отрезок, находящийся с данным в определенном отношении. Это отношение определялось положением винта, которым циркуль закреплялся.



Используя данные на чертеже, найдите приближенное значение отношения (с точностью до трех десятичных знаков), которое задано на этом циркуле. В какой известной вам пропорции используется это отношение? Обсудите, почему отношение длин двух отрезков, которые измеряются концами циркуля, можно задать с помощью закрепления винта в определенном месте ножек циркуля.

3. Какое число является обратным коэффициенту золотого сечения? Что оно показывает для отрезка, который разделен в золотом сечении?

4. Пусть задан ряд золотого сечения: $1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \ldots$. Убедитесь в том, что для членов этого ряда выполняется следующее свойство: $1 + \Phi = \Phi^2$, $\Phi + \Phi^2 = \Phi^3 \ldots$. Это свойство называется аддитивным. Название его произошло от слова «сложение».

5. Используйте двойной квадрат (два примыкающих друг к другу квадрата по стороне, длина которой равна 1) для построения *прямоугольников золотого сечения*, т.е. прямоугольников с отношением сторон $(\sqrt{5} - 1) : 2$ и $(\sqrt{5} + 1) : 2$. Придумайте способ построения таких прямоугольников с помощью циркуля и линейки.

Методические комментарии к выполнению заданий

В *задании 1* коэффициент золотого сечения находится из пропорции $(a–x)$: $x = x : a$. Использование основного свойства пропорции приведет к квадратному уравнению относительно отношения $\frac{x}{a}$, которое равно искомому отношению. Важно обратить внимание на то, что после нахождения корней квадратного уравнения необходимо исследовать их на соответствие условию.

В *задании 2* отношение, о котором идет речь, находится делением 56 на 90 (или 90 на 56). Можно убедиться в том, что полученный коэффициент приближенно равен коэффициенту золотого сечения (или обратному ему числу). Кроме того, можно сравнить полученное отношение с отношением числа 90 к 146. Ответ на последний вопрос требует использования для обоснования признаков подобия треугольников.

В *задании 3* требуется преобразовать число $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ в обратное ему число. При этом получится число $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, которое выражает отношение большей части отрезка к меньшей в случае золотого сечения.

В задании 4 нужно убедиться в справедливости приведенных равенств, используя соответствующие преобразования над точным значением коэффициента золотого сечения.

В *задании 5* учащимся предлагается изобрести способ построения соответствующих прямоугольников. Если это не удастся, можно обратиться за помощью к книге А.В. Волошинова «Математика и искусство».

КРАТКИЕ ПРОГРАММЫ ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК ЧЕРЕЗ ПРИЗМУ ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА ИЛИ ЯЗЫК МАТЕМАТИКИ

Н.Л. Стефанова,
д-р пед. наук, профессор, декан
факультета математики РГПУ им. А.И.Герцена
Н.Л. Шубина,
д-р филол. наук, профессор, декан
филологического факультета РГПУ им. А.И.Герцена

Пояснительная записка

Предлагаемый элективный курс предназначен для реализации в старших классах школ гуманитарного профиля, в частности школ филологического профиля. В связи с этим исходными для обсуждения являются языковые проблемы, которые возникают как в естественном (даже обыденном) языке, так и в математическом языке. Они могут обеспечить мотивацию учащихся для более глубокого и осознанного изучения языка математики. Вообще курс ориентирован на лучшее понимание этого языка.

Как известно, в школе при изучении математики используется естественный язык с элементами математического языка. Усвоение этого, если можно так назвать, «учебного математического языка» вызывает у учащихся, особенно у учащихся-гуманитариев, значительные трудности. Трудности эти во многом связаны с непониманием способов и приемов его построения. Некоторые наиболее важные из них будут раскрыты в данном элективном курсе.

Цель элективного курса состоит в повышении уровня понимания элементов математического языка, вошедших в общую культуру современного человека, через установление связей математического и естественного языков.

Задачами курса являются:

- формирование или развитие представлений учащихся о формальном языке (на примере языка математики);
- актуализация знаний понятийно-терминологической базы математического языка (метаязыка математики);
- выделение разных видов взаимосвязей математического и естественного (русского) языка;
- расширение общекультурного кругозора учащихся через выявление и установление разнообразных языковых связей, которые не осознавались ранее;

• установление некоторых особенностей функционирования терминов и выражений математического языка в повседневной речи;
• повышение уровня культуры речи.

Элективный курс имеет большой образовательный и воспитательный потенциал, так как воспитывает внимательное отношение к слову (термину), формирует представление о связи между обозначаемым понятием и избранным для него словом, создает условия для проведения анализа языкового материала. Кроме того, он направлен на обучение учащихся грамотному использованию научного языка в повседневной речи.

Доминантной формой учения является *поисково-исследовательская деятельность учащихся*, которая реализуется как на занятиях в классе, так и в ходе самостоятельной работы учащихся. Средствами для ее осуществления являются задания, которые предлагаются в сопровождающем курс учебном пособии.

Курс может быть реализован одним учителем (математики или русского языка) или двумя учителями совместно.

На изучение курса целесообразно отвести 24 аудиторных (академических) часа, распределив их по темам следующим образом:

1. Естественный язык, математический язык, язык науки — 4 ч.
2. Из истории формирования математического языка — 4 ч.
3. Число и буква — 4 ч.
4. Символьный язык математики — 2 ч.
5. Математика и ее терминологическая система — 4 ч.
6. Особенности функционирования математического языка в сфере устной и письменной коммуникации — 6 ч.

Основное содержание курса

Естественный язык, математический язык, язык науки. Естественный язык как средство общения и познания. Математический язык как кодовая система. Особенности научного языка. Связь математического языка с естественным языком. Отражение особенностей языка науки в математическом языке.

Из истории формирования математического языка. Этимология базовых понятий школьного курса математики. Динамические процессы в математическом языке. Языки-доноры математического языка. Современное состояние математического языка.

Число и буква. Символика чисел у древних греков. Число в кириллице. Число в символизме. Число и слово в современном мире. Число и цифра. Буква и математический знак.

Символьный язык математики. Знак и символ. Символ и понятие. Математический символ и слово. Математические выражения как аналог слов языка. Языковые и математические системы записи.

Математика и ее терминологическая система. Логико-понятийная и языковая терминология. Термин как словесный знак. Особенности функционирования математических терминов. Дублетность терминологии. Словесное и символическое наименование одного и того же понятия. Пути и способы формирования терминологической системы.

Особенности функционирования математического языка в сфере устной и письменной коммуникации. Слово как базисный знак языка. Слова и понятия. Языковые системы знаков. Использование терминов математической логики в речи и проблема однозначности понимания. Норма и вариативность в математическом языке. Язык математики в повседневной жизни. Некорректное употребление математических терминов как причина коммуникативных сбоев.

Курс построен по модульному принципу, который позволяет успешно организовать самостоятельную работу учащегося и различные маршруты освоения предложенного содержания. Основная функция учителя (учителей) в данном курсе состоит в «сопровождении» учащегося в его познавательной деятельности, коррекции ранее полученной информации, помощи в извлечении из полученных ранее знаний тех, которые актуализируются в данном курсе.

Организация и проведение аттестации учеников

Основными результатами освоения содержания элективного курса учащимися может быть определенный набор умений (как общеучебных, так и связанных с выделенной предметной областью на стыке математики и языка), а также приобретение опыта исследовательской деятельности языковых явлений, содержательно связанных с предметным полем — математикой. При этом должна использоваться преимущественно качественная оценка выполнения заданий, хотя возможно и итоговое тестирование учащихся.

Список основной литературы

Александрова Н.В. Математические термины. — М., Высшая школа, 1978.

Глейзер Г.И. История математики в средней школе. — М., 1970.

Кравченко А.В. Знак, значение, знание. — Иркутск, 2001.

Столяр А.А. Как математика ум в порядок приводит. — Минск, Вышэйшая школа, 1982.

АЛГЕБРА ПЛЮС: ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

А.Н. Земляков,
канд.пед.наук, ведущий научный сотрудник лаборатории дифференциации образования ЦЭПД РАО,
г.Черноголовка, Моск.обл.

Содержание курса

В скобках после наименования темы указано ориентировочное время на ее изучение исходя из трех часов в неделю; общее число часов — 60, резерв — 10 (10—11 классы).

ТЕМА 1. ЛОГИКА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ (2 недели)

Элементарные алгебраические задачи как предложения с переменными.

Множество решений задачи. Следование и равносильность (эквивалентность) задач.

Уравнения с переменными. Числовые неравенства и неравенства с переменной. Свойства числовых неравенств.

Сложные (составные) алгебраические задачи. Конъюнкция и дизъюнкция предложений. Системы и совокупности задач.

Алгебраические задачи с параметрами.

Логические задачи с параметрами. Задачи на следование и равносильность.

Интерпретация задач с параметрами на координатной плоскости.

ТЕМА 2. МНОГОЧЛЕНЫ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ (4 недели)

Представление о целых рациональных алгебраических выражениях. Многочлены над полями R, Q и над кольцом Z. Степень многочлена. Кольца многочленов.

Делимость и деление многочленов с остатком. Алгоритмы деления с остатком.

Теорема Безу. Корни многочленов. Следствия из теоремы Безу: теоремы о делимости на двучлен и о числе корней многочленов. Кратные корни.

Полностью разложимые многочлены и система Виета. Общая теорема Виета.

Элементы перечислительной комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения, перестановки с повторениями. Формула Ньютона для степени бинома. Треугольник Паскаля.

Квадратный трехчлен: линейная замена, график, корни, разложение, теорема Виета.

Квадратичные неравенства: метод интервалов и схема знаков квадратного трехчлена.

Кубические многочлены. Теорема о существовании корня у полинома нечетной степени. Угадывание корней и разложение.

Куб суммы/разности. Линейная замена и укороченное кубическое уравнение. Формула Кардано.

Графический анализ кубического уравнения $x^3+Ax=B$. Неприводимый случай (три корня) и необходимость комплексных чисел.

Уравнения степени 4. Биквадратные уравнения. Представление о методе замены.

Линейная замена, основанная на симметрии.

Угадывание корней. Разложение. Метод неопределенных коэффициентов. Схема разложения Феррари.

Полиномиальные уравнения высших степеней. Понижение степени заменой и разложением. Теоремы о рациональных корнях многочленов с целыми коэффициентами.

Приемы установления иррациональности и рациональности чисел.

ТЕМА 3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА (2 недели)

Представление о рациональных алгебраических выражениях.

Симметрические, кососимметрические и возвратные многочлены и уравнения.

Дробно-рациональные алгебраические уравнения. Общая схема решения.

Метод замены при решении дробно-рациональных уравнений.

Дробно-рациональные алгебраические неравенства. Общая схема решения методом сведения к совокупностям систем.

Метод интервалов решения дробно-рациональных алгебраических неравенств.

Метод оценки. Использование монотонности. Метод замены при решении неравенств.

Неравенства с двумя переменными. Множества решений на координатной плоскости. Стандартные неравенства. Метод областей.

ТЕМА 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
(5 недель)

Уравнения с несколькими переменными. Рациональные уравнения с двумя переменными. Однородные уравнения с двумя переменными.

Рациональные алгебраические системы. Метод подстановки. Метод исключения переменной. Равносильные линейные преобразования систем.

Однородные системы уравнений с двумя переменными.

Замена переменных в системах уравнений.

Симметрические выражения от двух переменных. Теорема Варинга—Гаусса о представлении симметрических многочленов через элементарные. Рекуррентное представление сумм степеней через элементарные симметрические многочлены (от двух переменных).

Системы Виета и симметрические системы с двумя переменными.

Метод разложения при решении систем уравнений.

Методы оценок и итераций при решении систем уравнений.

Оценка значений переменных.

Сведение уравнений к системам.

Системы с тремя переменными. Основные методы.

Системы Виета с тремя переменными.

ТЕМА 5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
(3 недели)

Представление об иррациональных алгебраических функциях. Понятия арифметических и алгебраических корней. Иррациональные алгебраические выражения и уравнения.

Уравнения с квадратными радикалами. Замена переменной. Замена с ограничениями.

Неэквивалентные преобразования. Сущность проверки.

Метод эквивалентных преобразований уравнений с квадратными радикалами.

Сведение иррациональных и рациональных уравнений к системам.

Освобождение от кубических радикалов.

Метод оценки. Использование монотонности. Использование однородности.

Иррациональные алгебраические неравенства. Почему неравенства с радикалами сложнее уравнений.

Эквивалентные преобразования неравенств. Стандартные схемы освобождения от радикалов в неравенствах (сведение к системам и совокупностям систем).

«Дробно-иррациональные» неравенства. Сведение к совокупностям систем.

Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Определение промежутков знакопостоянства непрерывных функций. Метод интервалов при решении иррациональных неравенств.

Замена при решении иррациональных неравенств.

Использование монотонности и оценок при решении неравенств.

Уравнения с модулями. Раскрытие модулей — стандартные схемы. Метод интервалов при раскрытии модулей.

Неравенства с модулями. Простейшие неравенства. Схемы освобождения от модулей в неравенствах.

Эквивалентные замены разностей модулей в разложенных и дробных неравенствах («правило знаков»).

Иррациональные алгебраические системы. Основные приемы.

Смешанные системы с двумя переменными.

ТЕМА 6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ
(4 недели)

Что такое задача с параметрами. Аналитический подход. Выписывание ответа (описание множеств решений) в задачах с параметрами.

Рациональные задачи с параметрами. Запись ответов.

Иррациональные задачи с параметрами. «Собирание» ответов.

Задачи с модулями и параметром. Критические значения параметра.

Метод интервалов в неравенствах с параметрами.

Замена в задачах с параметрами.

Метод разложения в задачах с параметрами. Разложение с помощью разрешения относительно параметра.

Системы с параметрами.

Метод координат (метод «*Оха*», или горизонтальных сечений) в задачах с параметрами. Идея метода.

Метод «*Оха*» при решении рациональных и иррациональных алгебраических уравнений с параметрами. Уединение параметра и метод «*Оха*».

Метод «*Оха*» при решении рациональных и иррациональных алгебраических неравенств и систем неравенств с параметрами.

Метод областей в рациональных и иррациональных неравенствах с параметрами.

Замена при использовании метода «*Оха*».

Задачи с модулями и параметрами.

Задачи на следование и равносильность задач с параметрами. Аналитический подход. Метод координат.

Применение производной при анализе и решении задач с параметрами.

ОБОСНОВАНИЯ В МАТЕМАТИКЕ (ОТ ЕВКЛИДА ДО КОМПЬЮТЕРА)

Е.А. Ермак,
канд.пед.наук, доцент кафедры
математического анализа
Псковского ГПИ
И.А. Иванов,
канд.пед.наук, доцент кафедры
общей математики Сочинского института
информационных технологий и математики
В.В. Орлов,
д-р пед.наук, профессор кафедры
методики обучения математике
РГПУ им. А.И. Герцена
Н.С. Подходова,
д-р пед.наук, профессор кафедры
методики обучения математике
РГПУ им. А.И. Герцена

Пояснительная записка

Курс, с одной стороны, поддерживает изучение основного курса математики, направлен на систематизацию знаний, в том числе и методов обоснований (методов решения задач), реализацию внутрипредметных связей, способствует лучшему освоению базового курса математики, а с другой — служит для внутрипрофильной дифференциации и построения индивидуального образовательного пути, для раскрытия основных закономерностей построения математической теории, направлен на рассмотрение фундаментальных понятий математики (действительное число и др.), способов конструирования локальных математических теорий, самостоятельной деятельности по построению микроисследований. Как один из результатов его освоения может быть осознанный выбор других элективных математических курсов, а также профессиональной деятельности в области теоретической или прикладной математики.

Объем аудиторных часов — 70 (по два часа в неделю). Курс целесообразно изучать в 10 классе. Он предназначен для реализации в рамках естественно-математического профиля. Часть его материалов может быть включена в базовый курс математики либо реализована в рамках предпрофильной подготовки.

Основное содержание курса

Вводный раздел (10 ч)

Обоснования в математике и в жизни, рациональные рассуждения. Математические задачи. Стратегии поиска решения задач. Методы решения задач. Числа и действия над ними, обоснование свойств действий. Геометрические задачи на доказательство, методы доказательств (прямое и косвенное), выбор обоснований, аксиомы и теоремы.

Тема I. Построение числовых систем (12 ч)

История числовых систем. Натуральные, целые, рациональные числа. Аксиоматика Пеано, аксиоматическое определение множества действительных чисел. Построение системы комплексных чисел и дальнейшее расширение числовых систем. Алгебраические структуры. Математическая индукция.

Тема II. Геометрия Евклида как первая научная система (10 ч)

Геометрические знания Древнего мира. Фалес и первые доказательства. Евклид и его «Начала». Различные системы аксиом геометрии Евклида. Непротиворечивость, независимость и полнота системы аксиом. Гильберт и его роль в аксиоматическом построении геометрии. Векторное построение геометрии Евклида.

Тема III. Геометрия Лобачевского как пример аксиоматической теории (10 ч)

История пятого постулата. Построение геометрии Лобачевского и ее модели (модель Пуанкаре на плоскости и в пространстве, модель Клейна, иные модели). О других геометриях.

Тема IV. Элементы логики (10 ч)

Отношения между множествами. Диаграммы Эйлера—Венна. Кванторы. Операции над высказываниями. Необходимые и достаточные условия. Некоторые законы логики и правила вывода. Структура математических определений и теорем. Доказательства с точки зрения логики.

Тема V. Вероятностно-статистические методы обоснования (10 ч)

Случайные величины: непрерывные и дискретные; описание случайных величин (закон распределения, функция распределения); числовые характеристики случайных величин. Основные законы распределения случайных величин и их числовые характеристики (равномерное, биномиальное, Пуассона, нормальное распределение). Основные понятия математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Основные задачи математической статистики. Оценка закона распределения. Гистограмма распределения.

Критерии согласия. Постановка задачи. Критерий согласия X^2. Проверка статистических гипотез. Нулевая и альтернативная гипотезы. Уровень значимости и мощность критерия. Проверка гипотез о математическом ожидании. Проверка гипотез о равенстве двух выборочных средних. Проверка гипотез о равенстве дисперсий двух выборок.

Тема VI. Компьютерное моделирование как средство обоснования (8 ч)

Проблема формализации построения доказательств с помощью компьютера на основании формальной логики. Рациональные рассуждения. Определение рационального рассуждения, типы рациональных рассуждений. Примеры применения рациональных рассуждений для построения некоторых математических моделей. Метод Монте-Карло. Компьютерное обоснование проблем, связанных с вычислениями. Вычисление основных математических констант (числа π, e). Решение частичных проблем математического характера (вычисление пределов, определенных интегралов, некоторые задачи линейной алгебры и т.д.).

Новизна курса состоит в том, что он строится в логике личностно ориентированного обучения, опирается на субъектный опыт ученика, его органическое соединение с общественно историческим опытом. В деятельностном плане его отличает направленность на активную самостоятельную познавательную деятельность разного уровня строгости, возможность выбора приоритетных видов деятельности. В содержательном плане понятно, что каждый из перечисленных разделов мог стать предметом изучения в самостоятельном курсе, однако в нашем курсе рассмотрение этих вопросов направлено на осознание школьниками многоаспектности математики, органического соединения теоретических и прикладных аспектов, рассмотрению собственного опыта школьника с позиций оснований математики, что способствует установлению фундаментальных внутрипредметных связей, возможности выбора сферы самостоятельной исследовательской деятельности, подготовке к исследовательской работе на стыке различных разделов математики.

Организация изучения материала

Занятия проводятся в форме семинаров, посвященных разрешению проблемных ситуаций, разработке мини-теорий в группах, обсуждению результатов индивидуальных и коллективных исследований и т.д. При изучении компьютерного моделирования как средства обоснований проводятся лабораторные работы. Учебный материал представлен в форме диалога.

Ученики самостоятельно, в микрогруппах, в сотрудничестве с учителем выполняют различные задания в соответствии со своими познавательными приоритетами и возможностями, на занятиях организуется обсуждение результатов этой работы, а также разнообразных творческих заданий, рефератов и т.п.

Соединение теоретических и прикладных аспектов в рамках одного курса имеет и профориентационное значение.

Предлагаемый элективный курс направлен на:

- систематизацию опыта, приобретенного при изучении математики и иных предметов, обобщение различных подходов к поиску обоснований (доказательств) и различных подходов к доказательствам;
- знакомство со способами конструирования научных теорий на примере геометрии;
- знакомство с моделями математической теории (поле вычетов по простому модулю, модели геометрии Лобачевского как средства проверки требований к аксиоматической теории: независимости, непротиворечивости);
- рассмотрение основных этапов развития математики как науки в контексте построения аксиоматических теорий;
- знакомство с элементами логики и теории множеств, необходимыми для обоснований, в том числе для математических доказательств.

УМК содержит учебное пособие для ученика, методическое пособие для учителя, книгу для чтения.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОКРУЖАЮЩЕГО МИРА

Е.А. Ермак,
канд. пед. наук, доцент кафедры
математического анализа Псковского ГПИ
И.А. Иванов,
канд. пед. наук, доцент кафедры
общей математики Сочинского института
информационных технологий и математики
В.В. Орлов,
д-р пед. наук, профессор кафедры
методики обучения математике РГПУ им. А.И. Герцена
Н.С. Подходова,
д-р пед. наук, профессор кафедры
методики обучения математике РГПУ им. А.И. Герцена

Пояснительная записка

Курс имеет дуалистический характер. С одной стороны, он поддерживает изучение основных профильных предметов (математика, физика, астрономия и др.), направлен на интеграцию знаний, реализацию межпредметных связей, а с другой стороны, служит для внутрипрофильной дифференциации и построения индивидуального образовательного пути (углубленное изучение ряда вопросов).

Объем аудиторных часов — 34 (17 недель по два часа в неделю). Курс может изучаться как во втором полугодии учениками 10 класса, так и в первом полугодии учениками 11 класса. Данный курс предназначен для реализации в естественно-математическом профиле, но может быть реализован и в других профилях.

Курс состоит из четырех разделов: «Элементы сферической геометрии», «Геометрические модели в естествознании», «Элементы геометрии Галилея», «Геометрия и теория относительности».

Цели курса: развитие представлений о ведущем математическом методе познания реальной действительности — математическом моделировании и формирование соответствующих умений; формирование целостной естественно-математической составляющей картины мира (на определенном уровне) и базы для продолжения математического образования в вузах различного профиля. Реализация поставленных целей будет способствовать овладению учащимися основами математической культуры, становлению личности.

Небольшое количество новых теоретических фактов во взаимосвязи с уже известными фактами из курсов математики, физики, географии позволяет научиться конструировать геометрические модели реальных ситуаций.

Широкая тематика курса дает возможность представить учащимся специфику познавательной деятельности. Познавательные интересы школьников формируются не только через содержание, но и специальную организацию процесса обучения.

Материал курса предназначен как для учеников, склонных к практическому, так и для тех, кто склонен к теоретическому мышлению. При изложении содержания используется историко-генетический подход, позволяющий показать историю возникновения научных проблем и различные подходы к их решению. В содержании реализованы связи с гуманитарными науками (историей, археологией), искусством (архитектурой).

При проектировании содержания курса, методов и форм его реализации авторы исходили из того, что одной из основных задач образования является создание условий для формирования у учащихся целостной картины мира, видения ими составляющих различных наук и понимания связей между этими составляющими и окружающим миром, своего места в мире и познания самого себя, а также возможностей для преобразования реального мира и самого себя.

В курсе авторы реализуют практико-ориентированный подход, который позволяет посмотреть на окружающий мир с разных позиций естественно-научных дисциплин, а не только математики.

Развитию познавательных интересов способствует возможность выбора различных видов деятельности (учебные теоретические исследования, решение прикладных задач, изучение общекультурной составляющей предметных знаний, конструирование и моделирование, поиск различной информации), создание ситуаций достижения успеха.

В каждом разделе курса имеются задания на актуализацию и систематизацию знаний и способов деятельности, субъектного опыта, что будет способствовать эффективному освоению предлагаемого курса.

Основные формы организации учебных занятий: беседы, семинары и лабораторные занятия.

Ученики самостоятельно, в микрогруппах, в сотрудничестве с учителем выполняют различные задания, на занятиях организуется обсуждение результатов этой работы, а также разнообразных творческих заданий, рефератов и т.п. Содержание курса представлено в виде диалога авторов и читателя, диалогов учеников и учителя, изучающих курс. Такая форма представления учебного материала позволяет организовать его самостоятельное изучение.

В учебно-методический комплект входят учебное пособие для учащихся, методическое пособие для учителя и книга для чтения.

Основное содержание курса[1]

Тема I. Элементы сферической геометрии (8 ч)

Плоскость как частный случай поверхности. Представление об искривленных поверхностях. Сфера. Координаты точки сферы: геометрический смысл географических координат. Расстояние между двумя различными точками сферы. Представление о геодезических линиях. Теорема о больших окружностях сферы. Сферический треугольник и его элементы. Основные соотношения между элементами сферического треугольника.

Тема II. Геометрические модели в естествознании (9 ч)

Симметрия. Виды симметрий: вращение вокруг прямой, поворотная симметрия, поворот плоскости вокруг точки, центральная симметрия, параллельный перенос, зеркальная и осевая симметрии. Композиция симметрий. Проявление симметрии в природе, технике, искусстве

Аналогия между географическими координатами точки и координатами проекции светила на небесную сферу в астрономии. Сферическая система координат как частный случай криволинейной системы координат. Решение сферических треугольников. Решение задач, требующих конструирования геометрических моделей географических и астрономических объектов на основе использования понятий и представлений сферической геометрии.

Первичные представления о кривизне поверхности: радиус кривизны данной плоской кривой в данной точке, главные кривизны поверхности, гауссова кривизна. Сфера как поверхность постоянной положительной кривизны. Сфера как искривленное двумерное пространство.

[1] Здесь приведен наиболее полный вариант содержания и ожидаемых результатов обучения. В зависимости от состава учащихся, профиля конкретного образовательного учреждения, его возможностей допускается различная степень детализации и строгости изучения материала. Подробные рекомендации по варьированию содержания приведены в пособии для учителя.

Тема III. Элементы геометрии Галилея (12 ч)

Описание равномерного прямолинейного движения на языке планиметрии Галилея. Геометрическое выражение принципа относительности, сформулированного Галилеем. Формулы преобразований Галилея для двумерного случая. Отличие системы координат в планиметрии Галилея от двумерной декартовой прямоугольной системы координат. Построения точек и прямых, их образов в планиметрии Галилея, косоугольная система координат. Особые и «обычные» прямые. Свойства отношения параллельности прямых. Длина отрезка прямой в планиметрии Галилея. Длина отрезка особой прямой. Расстояние от точки до прямой в геометрии Галилея. Окружность и ее свойства. Углы и их измерение. Треугольник и его элементы. Свойства треугольников в планиметрии Галилея. Первичные представления о принципе двойственности в геометрии Галилея (на примерах двойственных теорем, доказываемых независимо друг от друга). Четырехугольники планиметрии Галилея.

Моделирование процессов и явлений, описываемых классической механикой, с помощью понятий и представлений геометрии Галилея. Чтение чертежей из геометрии Галилея на языке классической механики.

Тема IV. Геометрия и теория относительности (5 ч)

Понятие мировой точки (события), мировой линии, представления о пространственно-временных диаграммах и их сечениях, о пространственно-временной координатной сетке. Построение релятивистской пространственно-временной диаграммы. Понятие изотропного гиперконуса (световых конусов), светоподобных, времениподобных, пространственноподобных интервалов и направлений. Представление о калибровочных гиперболах.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

Е.В. Андреева, канд.физ.-мат.наук,
Л.Л. Босова, канд.пед.наук,
И.Н. Фалина, канд.пед.наук

Пояснительная записка

Курс «Математические основы информатики» носит интегративный, междисциплинарный характер и ориентирован на учащихся физико-математического, частично естественно-научного и технико-технологического (компьютерно-технологического) профилей старших классов общеобразовательной школы. Курс рассчитан на учеников, имеющих базовую подготовку по информатике.

В результате изучения этого курса **учащиеся будут знать**:

- о роли фундаментальных знаний (математики) в развитии информатики, информационных и коммуникационных технологий;
- содержание понятий «базис», «алфавит», «основание» для позиционных систем счисления;
- особенности компьютерной арифметики над целыми числами;
- способы представления вещественных чисел в компьютере;
- принцип представления текстовой информации в компьютере;
- принцип оцифровки графической и звуковой информации;
- аксиомы и функции алгебры логики;
- функционально полные наборы логических функций;
- понятие «дизъюнктивная нормальная форма»;
- понятие исполнителя, среды исполнителя;
- понятие сложности алгоритма;
- понятие вычислимой функции;
- содержание понятий «информация» и «количество информации»;
- суть различных подходов к определению количества информации;
- сферу применения формул Хартли и Шеннона;
- способы работы с многоугольниками и многогранниками в компьютерной графике;
- формулы поворота в пространстве.

Курсу отводится 2 часа в неделю в течение одного года обучения — 10 (11) класс или по 1 часу в неделю в течение двух лет обучения — 10—11 классы; всего — 68 учебных часов.

Программа курса «Математические основы информатики» имеет блочно-модульную структуру:

Модуль 1. Системы счисления	10 ч
Модуль 2. Представление информации в компьютере	10 ч
Модуль 3. Введение в алгебру логики	14 ч
Модуль 4. Элементы теории алгоритмов	14 ч
Модуль 5. Основы теории информации	10 ч
Модуль 6. Математические основы компьютерной графики	10 ч
Всего:	68 ч

Основное содержание программы

Модуль 1. Системы счисления

Эта тема частично включена в базовый курс информатики. Поэтому в рамках данного курса предлагаются имплицитные знания и навыки школьников, состоящие в основном из умения переводить целые десятичные числа в двоичную систему и обратно, закрепить в вербальной (эксплицитной, логической) форме, раскрыв «природу» систем счисления.

1.1. Общие сведения о системах счисления.

1.2. Теорема о единственности представления натуральных чисел в P-ичных системах счисления.

1.3. Развернутая и свернутая форма записи. Представление произвольных чисел в позиционных системах.

1.4. Арифметические операции в P-ичных системах счисления.

1.5. Перевод чисел из P-ичной системы счисления в десятичную.

1.6. Перевод чисел из десятичной системы в P-ичную.

1.7. Связь между системами счисления, где $Q=P^m$.

Модуль 2. Представление информации в компьютере

Вопросы, рассматриваемые в данном разделе, практически не представлены в базовом курсе информатики.

2.1. Представление целых чисел.

2.2. Представление вещественных чисел.

2.3. Представление текстовой информации.

2.4. Способы представления графической и видео информации.

2.5. Цифровая запись звуковой информации.

Модуль 3. Введение в алгебру логики

Вопросы, рассматриваемые в данном разделе, практически не разбираются в базовом курсе информатики.

3.1. Алгебра логики. Понятие высказывания. Логические операции.

3.2. Логические формулы. Законы алгебры логики.

3.3. Методы решения логических задач.

3.4. Алгебра переключательных схем.

3.5. Булевы функции.

3.6. Канонические формы логических формул. Теорема о СДНФ.

3.7. Полные системы булевых функций.

3.8. Элементы схемотехники. Логические схемы.

Модуль 4. Элементы теории алгоритмов

При изучении данного модуля наибольшее внимание уделяется тем разделам, которые не были освещены в базовом курсе информатики.

4.1. Понятие алгоритма. Свойства алгоритмов.

4.2. Виды алгоритмов. Способы записи алгоритмов.

4.3. Уточнение понятия алгоритма. Машина Поста.

4.4. Алгоритмически неразрешимые задачи и вычислимые функции.

4.5. Понятие сложности алгоритма.

4.6. Алгоритмы поиска и сортировки.

Модуль 5. Основы теории информации

Вопросы, изучаемые в рамках данного модуля, отчасти затрагиваются в базовом курсе информатики. Но недостаточный уровень математической подготовки учащихся 7—9 классов не позволяет преподавателям продвинуться дальше «бытового» уровня раскрытия основных понятий данного раздела.

5.1. Понятие информации. Измерение информации.

5.2. Формула Хартли определения количества информации.

5.3. Закон аддитивности информации.

5.4. Информация и вероятность. Формула Шеннона.

5.5. Оптимальное кодирование информации. Код Хаффмана.

Модуль 6. Математические основы компьютерной графики

В данном модуле рассматриваются некоторые алгоритмы решения геометрических задач. Такие задачи возникают в компьютерной графике, проектировании интегральных схем, технических устройств и др. Цель настоящего материала — показать такие подходы к решению задач вычислительной геометрии, которые позволяют максимально просто получать решения большинства элементарных подзадач, не используя приемов высшей математики, в частности линейной алгебры.

6.1. Координаты и векторы на плоскости.
6.2. Уравнения линий.
6.3. Взаимное расположение точек и фигур.
6.4. Многоугольники.
6.5. Геометрические объекты в пространстве.

Состав учебно-методического комплекта

В состав учебно-методического комплекта входят:

1. Учебное пособие для школьников, включающее необходимые теоретические материалы, вопросы для самоконтроля, задачи, задания и упражнения для закрепления знаний и отработки практических навыков, творческие задания.

2. Методическое пособие для учителя с методическими рекомендациями по проведению занятий, решению задач, организации промежуточного и итогового контроля знаний учащихся.

3. Хрестоматия, содержащая обширную дополнительную информацию по данному курсу, в том числе исторические сведения, выдержки из малодоступных книг.