МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ПРОВЕДЕНИЮ ШКОЛЬНОГО И МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПОВ ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В 2020/21 УЧЕБНОМ ГОДУ

Москва
2020

Рекомендации для школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2020/2021 учебном году утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 03.07.2020 г.).

СОДЕРЖАНИЕ

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАЗРАБОТКЕ ЗАДАНИЙ И ТРЕБОВАНИЙ К ОРГАНИЗАЦИИ И ПРОВЕДЕНИЮ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА

1.1. Введение

Настоящие требования к организации и проведению школьного этапа всероссийской олимпиады школьников (далее – олимпиада) по математике разработаны на основе Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников, утверждѐнного приказом Минобрнауки России от 18 ноября 2013 г. №1252, и изменений, утверждѐнных приказами Минобрнауки России от 17 марта 2015 г. № 249, от 17 декабря 2015 г. № 1488, от 17 ноября 2016 г. № 1435 и приказом Минпросвещения России от 17 марта 2020 г. № 96 (далее – Порядок).

Настоящие Методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь муниципальным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения школьного этапа олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания школьного этапа, описание подходов к разработке заданий муниципальными предметно-методическими комиссиями, рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы олимпиадных заданий для проведения школьного этапа олимпиады с решениями. Данные задачи предлагались на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны или включены в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные Методические рекомендации окажутся полезными при проведении школьного этапа всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в его проведении. В случае необходимости дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в Центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для школьного этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2020/21 учебном году утверждены на заседании

Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 03 июля 2020 г.).

1.2. Основные задачи

Одной из важнейших задач Олимпиады на начальных этапах является выявление и развитие у обучающихся творческих способностей и интереса к математике и научной (научно-исследовательской) деятельности, формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках и факультативах, повышение качества математического образования.

Важную роль здесь играет свойственное подростковому периоду стремление к состязательности, к достижению успеха. Квалифицированно составленные математические олимпиады являются соревнованиями, где в честной и объективной борьбе обучающийся может раскрыть свой интеллектуальный потенциал, соотнести свой уровень математических способностей с уровнем других учащихся школы. Кроме того, привлекательными для участников являются нестандартные условия задач, предлагаемых на олимпиадах. Они заметно отличаются от обязательных при изучении школьного материала заданий, направленных на отработку выполнения стандартных алгоритмов (например, решения квадратных уравнений), и требуют демонстрации креативности участников олимпиады. Наконец, первые олимпиадные успехи важны для самооценки учащегося, а также, в ряде случаев, для изменения отношения к нему учителей, возможно, недооценивавших его способности. Нередки случаи, когда способный и даже талантливый обучающийся допускает при выполнении стандартной школьной контрольной работы арифметические ошибки либо выполняет её недостаточно аккуратно, что не устраивает учителя.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на школьном этапе олимпиады.

1.3. Порядок и требования к организации и проведению школьного этапа олимпиады

При проведении школьного этапа всероссийской олимпиады школьников по математике необходимо руководствоваться Порядком.

Школьный этап олимпиады проводится для учащихся **4—11 классов**.

Конкретные сроки и места проведения школьного этапа олимпиады по математике устанавливаются органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования. Олимпиада для учащихся всех школ муниципального образования проводится по единым заданиям, разработанным для каждой из параллелей 4—11 классов муниципальной предметно-методической комиссией, назначаемой органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования.

В олимпиаде имеет право принимать участие **каждый обучающийся** (далее – участник), в том числе вне зависимости от его успеваемости по предмету. При проведении олимпиады каждому участнику олимпиады должно быть предоставлено отдельное рабочее место, обеспечивающее **самостоятельное** выполнение заданий олимпиады каждым участником. Продолжительность олимпиады должна учитывать возрастные особенности участников, а также трудность предлагаемых заданий.

Рекомендуемое время проведения олимпиады: для 4—6 классов — 1—2 урока, для 7—8 классов — 2 урока, для 9—11 классов — 2—3 урока.

Участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады.

С учётом Постановления Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 30.06.2020 г. № 16 «Об утверждении санитарно-эпидемиологических правил СП 3.1/2.4.3598-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к устройству, содержанию и организации работы образовательных организаций и других объектов социальной инфраструктуры для детей и молодёжи в условиях распространения новой коронавирусной инфекции (COVID-19)» допускается проведение школьного этапа олимпиады с использованием информационно-коммуникационных технологий.

1.4. Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для школьного этапа

Задания школьного этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания не должны носить характер обычной контрольной работы по различным разделам школьной математики. Бóльшая часть заданий должна включать в себя элементы научного творчества.

2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.

3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить практически каждому еѐ участнику возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись не менее 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим – 20—30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.

4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.

5. Формулировки задач должны быть корректными, чѐткими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, незнакомые учащимся данной возрастной категории.

6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4—6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в начальном и среднем звеньях школы), комбинаторику. Так, в варианты для 4—6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие чѐтности; в 7—8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9—11 классах последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

7. Задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких еѐ участников со всеми задачами, включѐнными в вариант. Желательно использование различных источников, неизвестных участникам Олимпиады, либо включение в варианты новых задач.

8. В задания для учащихся 4—6 классов, впервые участвующих в олимпиаде, желательно включать задачи, не требующие сложных (многоступенчатых) математических рассуждений.

1.5. Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ участников в разных школах необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7 - балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6—7	Верное решение. Имеются небольшие недочѐты, в целом не влияющие на решение
5—6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
2—3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0—1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

Помимо этого, в Методических рекомендациях по проведению олимпиады следует проинформировать жюри школьного этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведѐнного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень еѐ правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачѐркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при еѐ выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объѐму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

1.6. Перечень средств обучения и воспитания, используемых при проведении школьного этапа олимпиады

Тиражирование заданий осуществляется с учѐтом следующих параметров: листы бумаги формата А5 или А4, чѐрно-белая печать.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуются отдельные листы бумаги формата А4. Для черновиков выдаются отдельные листы. Записи на черновиках не учитываются при проверке выполненных олимпиадных заданий. Черновики сдаются вместе с выполненными заданиями. Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или чѐрными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелѐными чернилами.

1.7. Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешѐнных к использованию во время проведения олимпиады

Участникам во время проведения олимпиады в аудитории запрещено иметь при себе средства связи, электронно-вычислительную технику, фото-, аудио- и видеоаппаратуру, справочные материалы, письменные заметки и иные средства хранения и передачи информации.

1.8. Показ работ и проведение апелляций

Каждый участник олимпиады имеет право ознакомиться с результатами проверки своей работы. Рекомендуемое время проведения показа работ – на следующий учебный день после проведения олимпиады. Перед проведением показа работ жюри должно ознакомить участников олимпиады с решениями задач и критериями оценивания: в устной форме путѐм проведения разбора вариантов (отдельно для каждого класса) либо путѐм предоставления участникам решений заданий и критериев оценивания в печатном виде. При проведении показа работ члены жюри дают участнику олимпиады аргументированные пояснения по снижению баллов.

В случае несогласия участника олимпиады с выставленными баллами он подаѐт апелляцию. Процедура подачи апелляции определяется организатором школьного этапа олимпиады в соответствии с Порядком. Важно отметить, что баллы в работах могут быть изменены только после рассмотрения апелляции и принятия положительного решения по их изменению. При проведении показа работ баллы могут быть изменены только в случае установления технической ошибки по внесению баллов в протокол. При этом повышение баллов возможно только путѐм подачи участником олимпиады апелляции.

1.9. Тематика заданий школьного этапа олимпиады

Ниже приведена тематика олимпиадных заданий для разных классов.

В приведѐнном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

4—5 КЛАССЫ

Натуральные числа и нуль.

Делители и кратные числа.

Деление с остатком.

Чѐтность.

Текстовые задачи.

Геометрические фигуры на плоскости, измерение геометрических величин.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания, переливания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

Построение примеров и контрпримеров.

Разрезания.

6—7 КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Чѐтность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции $y = kx$, $y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и её свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и их свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

8—9 КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Чѐтность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и еѐ свойства. Многочлены. Формулы сокращѐнного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трѐхчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трѐхчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и еѐ свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырѐхугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и еѐ свойства. Площади четырѐхугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и еѐ свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

10—11 КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Чѐтность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа.

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращѐнного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, чѐтность и нечѐтность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, еѐ свойства и график. Логарифмическая функция, еѐ свойства и график. Степенная функция, еѐ свойства и график.

Производная, еѐ геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и еѐ свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и еѐ свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трѐх перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

1.10. Типовые задания школьного этапа олимпиады

Ниже приведены примеры типовых задач школьного этапа олимпиады с указанием примерной сложности для соответствующего класса. Задания разбиты по основным темам.

Арифметика, числовые ребусы

(4—5 классы, средняя.) Восстановите пример на сложение, где цифры слагаемых заменены звѐздочками: ** + ** + **= 296.

Ответ. 99+99+98=296.

(4—6 классы, лѐгкая.) Найдите решение числового ребуса $AAA - AA - A = B$. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Ответ. 111 – 11 – 1 = 99.

(5—6 классы, средняя.) Расставьте скобки в выражении 1 : 2 : 3 : 4 : 5 = 30 так, чтобы получилось верное равенство.

Ответ. 1 : (2 : 3 : 4 : 5) = 30.

(7—8 классы, лѐгкая.) Расставьте скобки в левой части выражения 2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5 так, чтобы получилось верное равенство.

Ответ. (2 : 3) : ((4 : 5) : 6) = 5.

(7—8 классы, сложная.) Сколько решений имеет ребус $ABBB \times C + AC = CBAC$? Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Ответ. 8 решений.

Решение. Заметим, что цифры A и C – ненулевые. Вычтем из обоих частей равенства $\overline{AC}$. Получим $\overline{ABBB} \times C = \overline{CB00}$. Поскольку первая цифра числа $\overline{CB00}$ равна C, это возможно только в случае, когда $A = 1$. Получим $\overline{1BBB} \times C = \overline{C000} + \overline{BBB} \times C = \overline{CB00} = \overline{C000} + \overline{B00}$, откуда $\overline{BBB} \times C = \overline{B00}$. Это возможно только при $B = 0$. Итак, $A = 1$ и $B = 0$. Подставим эти значения в условие: $1000 \times C + \overline{1C} = \overline{C01C}$. Это равенство выполняется при любых C. Однако разным буквам соответствуют разные цифры, поэтому $C \neq 0$ и $C \neq 1$. Осталось 8 возможностей для C. Значит, ребус имеет 8 решений.

(8 класс, средняя.) Число, состоящее из N цифр 8 (других цифр в числе нет), умножили на число 8. Полученное произведение имеет сумму цифр, равную 1200. Найдите N.

Ответ. 1191.

Решение. Перемножив числа в столбик, получим результат: 7111…11104. В этом числе $N – 2$ единицы. А сумма его цифр равна $7 + (N - 2) + 4 = 1200$, откуда $N = 1191$.

(8 класс, средняя.) Найдите какое-нибудь натуральное число, произведение цифр которого на 50 больше суммы его цифр.

Ответ. Например, 9811111.

Разрезания

(4—6 классы, средняя.) Разрежьте угол 8×8 на уголки из трѐх клеток (рис. 1).

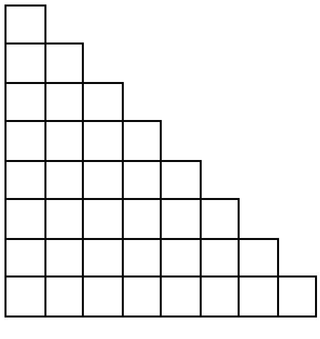

Рис. 1

Решение. Одно из возможных решений показано на рисунке 2.

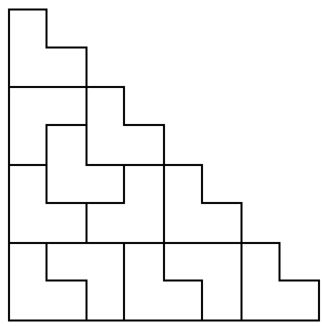

Рис. 2

(7—8 классы, средняя.) Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части так, чтобы из полученных четырёх кусков можно было сложить квадрат.

Решение. Два возможных варианта показаны на рисунке 3.

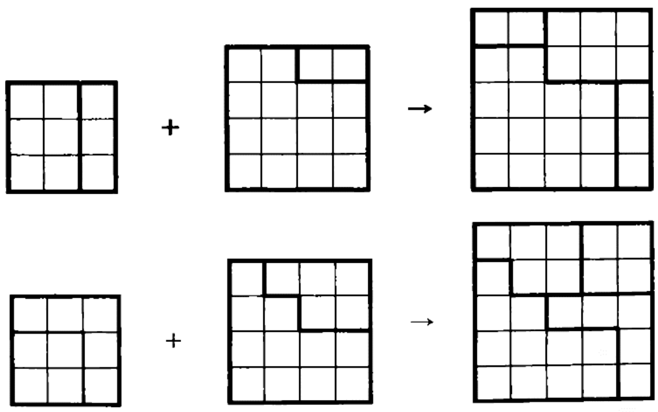

Рис. 3

Текстовые задачи

(4—5 классы, лёгкая.) На листе бумаги нарисованы квадрат и прямоугольник. Квадрат имеет площадь 25 см^2. Одна из сторон прямоугольника на 1 см больше стороны квадрата, а другая сторона на 2 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь этого прямоугольника.

Ответ. 18 см^2.

(6—7 классы, средняя.) Петя сказал, что у него братьев и сестер поровну, а Маша сказала, что у неѐ братьев в три раза больше, чем сестѐр. Сколько детей в семье, если Маша и Петя – брат и сестра?

Ответ. 5 детей (3 брата и 2 сестры).

Решение. Пусть сестёр в семье x. Тогда из ответа Пети следует, что братьев в семье $x + 1$. Теперь из ответа Маши получаем уравнение $x + 1 = 3(x - 1)$, откуда $x = 2$.

(5—7 классы, средняя.) У Карлсона в шкафу стоят 5 банок малинового, 8 банок земляничного, 10 банок вишнѐвого и 25 банок клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть всѐ варенье, если каждый день он хочет съедать 2 банки варенья, при этом обязательно из разных ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то из $5 + 8 + 10 = 23$ банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и всѐ варенье съесть не сможет.

(5—7 классы, средняя.) В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

Решение. При первом взвешивании на одну из чашек весов кладѐм гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 13 и 12 кг гвоздей. Первую кучку откладываем, а остальные гвозди делим пополам, взвешивая без гири: $12 = 6 + 6$. Получили искомое количество гвоздей: $19 = 13 + 6$.

(5—7 классы, средняя.) На прямой через равные промежутки поставили сто точек, и они заняли отрезок длины a. Затем на прямой через такие же промежутки поставили десять тысяч точек, и они заняли отрезок длины b. Во сколько раз b больше a?

Ответ. В 101 раз.

Решение. Обозначим длину промежутка за x. 100 точек делят отрезок длины a на 99 промежутков, а 10 000 точек делят отрезок длины b на 9999 промежутков. Поэтому $a = 99x$, $b = 9999x$ и $b = 101a$.

(6—7 классы, средняя.) К новогоднему празднику школа покупает каждому ученику по шоколадке. Известно, что если покупать шоколад в упаковках по 20 шоколадок в каждой, то понадобится на 5 упаковок больше, чем упаковок по 24 шоколадки. Сколько учеников в школе?

Ответ. 600.

(7—8 классы, средняя.) Три ученика A, B и C участвовали в беге на 100 м. Когда A прибежал на финиш, B был позади него на 10 м, также, когда B финишировал, C был позади него на 10 м. На сколько метров на финише A опередил C?

Ответ. На 19 метров.

Решение. Скорость B составляет 0,9 от скорости A, а скорость C составляет 0,9 от скорости B, т. е. 0,81 от скорости A.

(7—8 классы, средняя.) Определите, чему равен угол между часовой и минутной стрелками часов в 23 часа 45 минут.

Ответ. 82,5°.

Решение. Угол между минутной стрелкой и 12:00 равен 90°, а между часовой и 12:00 равен четверти от угла между 11:00 и 12:00, т.е. равен $\frac{1}{4}\cdot\frac{360°}{12}=7,5°$.

(8—9 классы, средняя.) Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, к 17:00 проехал в 1,25 раза больший путь, чем к 16:00. Когда поезд выехал?

Ответ. В 12:00.

Решение. За 1 час от 16:00 до 17:00 поезд проехал 0,25 пути с момента выезда до 16:00. Значит, он ехал 4 часа и выехал в 12:00.

(7—8 классы, средняя.) Два автомобиля, находящиеся на расстоянии S км друг от друга, движутся навстречу друг другу. Скорость первого автомобиля v_1 км/ч, второго – v_2 км/ч. Через какое время они снова окажутся на расстоянии S км друг от друга?

Ответ. $\frac{2S}{v_1+v_2}$.

Решение. Автомобили встретятся через $\frac{S}{v_1+v_2}$ ч. Поэтому через такое же время после момента встречи расстояние между ними снова станет равно S.

(7—8 классы, средняя.) В два киоска поступил товар по одинаковой цене. Через неделю в первом киоске все цены были снижены на 10%, а ещѐ через неделю – подняты на 20%. Во втором киоске через две недели цены были увеличены на 10%. В каком киоске через две недели после поступления товара цены ниже?

Ответ. В первом киоске.

Решение. Если x – начальная цена товара, то его конечная цена в первом киоске – $x \cdot \frac{90}{100} \cdot \frac{120}{100} = 1,08x$, а во втором – $x \cdot \frac{110}{100} = 1,1x$.

(6—7 классы, сложная.) У весов сдвинута стрелка, т. е. они всегда показывают на фиксированное число граммов больше (или меньше), чем истинный вес. Когда на весы положили дыню, весы показали 3 кг. Когда на весы положили арбуз, весы показали 5 кг. Когда взвесили и арбуз, и дыню, весы показали 7 кг. Сколько кг покажут весы, если на них поставить гирю в 2 кг?

Ответ. 3 кг.

Решение. На сумму 3 + 5 = 8 кг сдвиг стрелки влияет дважды, а на вес 7 кг – только один раз. Поэтому сдвиг стрелки равен 8 – 7 = 1 кг. Следовательно, правильный вес на 1 кг меньше, чем показывают весы. Значит, если на весы поставить гирю в 2 кг, то они покажут 3 кг.

(9—11 классы, средняя.) По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд, когда же они едут в одном направлении, то один настигает другого каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров?

Ответ. 9 м/с и 8 м/с.

Решение. Пусть скорости велосипедистов равны x м/с и y м/с ($x > y$). Тогда $10(x+y) = 170$ и $170(x-y) = 170$. Отсюда находим: x = 9 м/с и y = 8 м/с.

Логические задачи

(6—7 классы, сложная.) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Встретились три островитянина: Петя, Вася и Толя. Петя сказал: «Мы все лжецы». Вася на это ему ответил: «Нет, только ты». Может ли Толя быть лжецом?

Ответ. Не может.

Решение. Если Толя лжец, то и Вася лжец. Но тогда Петя не может быть ни лжецом (так как он тогда сказал бы правду), ни рыцарем (так как он тогда бы солгал). Значит, Толя не может быть лжецом.

(5—6 классы, средняя.) К Васе пришли его одноклассники. Мать Васи спросила у него, сколько пришло гостей. Вася ответил: «Больше шести», а стоявшая рядом сестрѐнка сказала: «Больше пяти». Сколько было гостей, если известно, что один ответ верный, а другой нет?

Ответ. 6.

Решение. Допустим, что гостей действительно больше шести. Тогда правы и Вася, и его сестра, а это противоречит условию задачи. Значит, гостей не больше шести, и Вася неправ. Но тогда должна быть права сестра, иначе снова нарушится условие задачи. Значит, гостей больше пяти. Но если их больше пяти и не больше шести, то их ровно шесть.

(6—7 классы, сложная.) Одиннадцать шестиклассников встали в круг. Они договорились, что некоторые из них всегда говорят правду, а все другие всегда лгут. Каждому из них раздали по две карточки, и каждый сказал: «У меня карточки одного цвета». После этого каждый передал обе свои карточки своему соседу справа. Могли ли они все после этого сказать: «У меня теперь карточки разных цветов»?

Ответ. Не могли.

Решение. Рассмотрим двух шестиклассников, стоящих рядом. Про карточки, которые правый из них (П) получил от левого (Л), они дали разные ответы. Значит, один из них говорит правду, а другой лжѐт. Пусть следующий по кругу за П – шестиклассник К. Тогда в паре П – К также один говорит правду, а другой лжѐт. И так далее. Значит, говорящие правду и ложь чередуются. Поэтому их должно быть чѐтное количество.

(9—11 классы, средняя.) В мешке лежат 26 синих и красных шаров. Среди любых 18 шаров есть хотя бы один синий, а среди любых 10 шаров есть хотя бы один красный. Сколько красных шаров в мешке?

Ответ. 17.

Решение. Так как из 18 шаров найдѐтся хотя бы один синий, то красных не более 17, а из любых 10 шаров найдѐтся хотя бы один красный, т. е. синих не более 9. Так как всех шаров 26, то синих – 9, а красных – 17.

Чѐтность

(7—8 классы, сложная.) Вдоль забора растут 10 кустов смородины. Число ягод на соседних кустах различается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 1000 ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Число ягод на двух соседних кустах различается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечѐтное число ягод. Тогда количество ягод на десяти кустах равно сумме пяти нечѐтных чисел, т. е. числу нечѐтному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 1000 ягод.

(6—7 классы, сложная.) В 6Б классе обучаются 20 учеников. В первой четверти они по трое дежурили по классу. Могло ли так получиться, что в некоторый момент каждый из учеников отдежурил с каждым ровно по одному разу?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что такое возможно. Рассмотрим любого ученика. В первое своѐ дежурство он отдежурил с двумя одноклассниками. Во второе – с двумя другими и т. д. Так как у него 19 одноклассников (нечѐтное число), то после девятого его дежурства останется ровно один одноклассник, с которым он не дежурил. Полученное противоречие завершает доказательство.

(6—7 классы, сложная.) Два натуральных числа в сумме дают 1001. Вася увеличил каждое из них на 25 и перемножил полученные числа. Он получил, что произведение также оканчивается на 1001. Докажите, что Вася ошибся.

Решение. Если сумма двух натуральных числе равна 1001, то одно из них чѐтное, а другое нечѐтное. Если к чѐтному числу прибавить 25, получится нечѐтное число. Аналогично, если к нечѐтному числу прибавить 25, получится чѐтное число. А произведение чѐтного и нечѐтного чисел должно быть числом чѐтным и поэтому не может оканчиваться на 1001.

(6—7 классы, средняя.) Сумма пяти чисел равна 200. Докажите, что их произведение не может оканчиваться на 1999.

Решение. Произведение чисел нечѐтно, следовательно, все пять чисел нечѐтны, и их сумма также должна быть нечѐтной.

(5—7 классы, сложная.) В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даѐт победителю забега три конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 30, а Вася – 33 конфеты. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

Ответ. Коля.

Решение. После каждого забега все присутствующие на уроке школьники получают нечѐтное количество конфет. Поэтому чѐтность количества полученных конфет у ребят, посетивших все уроки, должна быть одинаковой. Но из трѐх чисел 29, 30, 33 первое и третье – нечѐтные, а второе – чѐтное. Значит, пропустил урок тот, у кого чѐтное количество заработанных конфет.

(8—9 классы, сложная.) Грани игрального кубика занумерованы числами от 1 до 6. Петя сложил из восьми игральных кубиков куб вдвое большего размера так, что числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы. Может ли сумма всех 24 чисел, написанных на поверхности сложенного Петей куба, равняться 99?

Ответ. Не может.

Решение. Сумма всех чисел, записанных на гранях этих восьми игральных кубиков, равна чѐтному числу ($8 \cdot 21$). Так как числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы, то все числа внутри большого куба разбиваются на пары одинаковых. То есть сумма всех чисел внутри большого куба чѐтная. Значит, и сумма всех чисел на поверхности большого куба также должна быть чѐтной (как разность чѐтных чисел) и не может равняться 99.

Делимость

(6—7 классы, лѐгкая). Запишите числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 в строку так, чтобы из любых двух соседних чисел одно делилось на другое.

Ответ. Например, 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1.

(5—6 классы, средняя.) Каждое из двух чисел не делится на 10. Их произведение равно 1000. А чему может равняться их сумма?

Ответ. 133 = 125+8.

(6—7 классы, лѐгкая.) Придумайте девятизначное число, у которого по крайней мере три разные цифры и которое делится на каждую из них.

Ответ. Например, число 111111124 (делится на 1, на 2 и на 4).

(7—8 классы, сложная.) В классе больше 20, но меньше 30 учеников. При этом в классе тех, кто ходит в шахматный кружок, в 2 раза меньше, чем тех, кто не ходит. А тех, кто ходит в шашечный кружок, в 3 раза меньше, чем тех, кто не ходит. Сколько учеников в классе?

Ответ. 24 ученика.

Решение. Пусть в шахматный кружок ходит x ребят, тогда в него не ходит $2x$ ребят. Итак, всего в классе $3x$ ребят, и количество учеников в классе делится на 3. Аналогично, пусть в шашечный кружок ходит y ребят, тогда в него не ходит $3y$ ребят. Итак, всего в классе $4y$ ребят, и количество учеников в классе делится на 4.

Число учеников в классе делится и на 3, и на 4, т. е. оно делится на 12. Единственное подходящее число, большее 20 и меньшее 30, — это 24.

(9—10 классы, средняя.) Докажите, что при любом натуральном n число n^3+3n^2+6n+8 является составным.

Решение. Утверждение задачи следует из разложения данного выражения на множители, каждый из которых больше единицы при всех натуральных n:

$$n^3+3n^2+6n+8=n^3+8+3n^2+6n=$$
$$=(n+2)(n^2-2n+4)+3n(n+2)=(n+2)(n^2+n+4).$$

(8—9 классы, сложная.) Произведение трѐх натуральных чисел оканчивается на 2222. Докажите, что их сумма не может равняться 9999.

Решение. Если сумма трѐх целых чисел равна 9999, то либо они все нечѐтны (и тогда их произведение оканчивается на нечѐтную цифру), либо два из них чѐтны, а одно нечѐтно (тогда их произведение делится на 4, а число, оканчивающееся на 22, на 4 не делится).

(8—10 классы, средняя.) Сумма цифр натурального числа A равна сумме цифр числа $3A$.

а) Докажите, что A делится на 3.

б) Докажите, что A делится на 9.

в) Верно ли, что A обязательно делится на 27?

Ответ. в) Не верно.

Решение.

а), б) Пусть сумма цифр числа A равна S. Но так как $3A$ делится на 3, то S делится на 3, тогда и A делится на 3. Отсюда следует, что $3A$ делится на 9 и S также делится на 9, т. е. A делится на 9.

в) Не верно, можно взять, например, $A = 9$.

(8—10 классы, средняя.) Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, меньших 1000, произведение которых делится на 9999.

Ответ. Например, 99, 100 и 101.

Решение. Этот пример можно получить, заметив, что $9999 = 99 \cdot 101$.

Замечание. Кроме этого, существует ровно один другой пример: 504, 505, 506.

(9—10 классы, средняя.) На доске написано число 543254325432. Некоторые цифры стѐрли так, чтобы получить наибольшее возможное число, делящееся на 9. Чему равно это наибольшее число?

Ответ. 5435432532.

Решение. Из признака делимости на 9 следует, что сумма стѐртых цифр должна быть равна 6. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр. Поэтому нужно стереть две цифры – либо 3 и 3, либо 2 и 4. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят бóльшие цифры. Поэтому нужно стереть первую двойку и последнюю четвѐрку.

Алгебра

(8 класс, лѐгкая.) Найдите наименьший целый корень уравнения $(|x|-1)(x+2,5)=0$.

Ответ. –1.

(8 класс, лѐгкая.) Проходят ли прямые $x + y - 1 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$ и $4x - 3y - 1 = 0$ через одну точку?

Ответ. Да.

Решение. Прямые проходят через точку $\left(\frac{4}{7}; \frac{3}{7}\right)$.

(8—9 классы, средняя.) Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 1000. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ. Уменьшится на 1002.

Решение. Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1)=xy+y-x-1$. Произведение увеличилось на 1000, т. е. $y-x-1=1000$ или $y-x=1001$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x-1)(y+1)=xy-y+x-1$.

Заметим, что $xy-y+x-1=xy-(y-x)-1=xy-1001-1=xy-1002$, т. е. произведение уменьшилось на 1002.

(8 класс, средняя.) Докажите, что если $a+2b=3c$ и $b+2c=3a$, то $c+2a=3b$.

Решение. Сложив два данных равенства, получим $a+3b+2c=3c+3a$, откуда $c+2a=3b$.

Замечание. Решая систему методом подстановки, получим $a = b = c$, откуда также следует доказываемое равенство.

(9 класс, средняя.) Найдите сумму двух различных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $a^2+b=b^2+a$.

Ответ. $a+b=1$.

Решение. Уравнение можно преобразовать к виду $(a-b)(a+b-1)=0$. А так как $a \neq b$, то $a+b-1=0$, откуда $a+b=1$.

(9—10 классы, средняя.) Найдите все пары чисел x, y, для которых выполнено равенство $\sqrt{x-y}+\sqrt{y-x}=x+y+1$.

Ответ. $x = y = -0,5$.

Решение. В силу неотрицательности подкоренных выражений должны одновременно выполняться неравенства $x \geq y$, $x \leq y$, откуда и следует $x = y = -0,5$.

(9—11 классы, средняя.) Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих чисел.

Ответ. 105.

Решение. Сумма данных чисел равна 150. Так как все числа различны, то сумма девяти наименьших из них не меньше чем 1 + 2 + ... + 9 = 45. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем 105. Это возможно: (1 + 2 + ... + 9 + 105) : 10 = 15.

(8—9 классы, сложная.) В формулу линейной функции $y = kx + b$ вместо букв k и b впишите числа от 11 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось пять функций, графики которых проходят через одну точку.

Решение. Например, графики функций $y = 11x + 20$, $y = 12x + 19$, $y = 13x + 18$, $y = 14x + 17$, $y = 15x + 16$ проходят через точку (1; 31).

Геометрия

(8 класс, лѐгкая.) Сторона AC треугольника ABC точками D и E разделена на три равные части (точка D лежит между A и E). Докажите, что если $BD = BE$, то треугольник ABC равнобедренный.

Решение. Так как треугольник BDE равнобедренный, то $\angle BDE = \angle BED$. Значит, равны соответствующие смежные углы: $\angle ADB = \angle CEB$. По условию $AD = EC$ и $BD = BE$. Поэтому треугольники ADB и CEB равны (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует равенство сторон AB и BC. Отсюда следует, что треугольник ABC равнобедренный.

(8 класс, средняя.) Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если $OA = OC$, то треугольник ABC равнобедренный.

Решение. $\Delta AOC_1 = \Delta COA_1$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно, $OC_1 = OA_1$ (рис. 4). Поэтому $AA_1 = CC_1$, и, следовательно, $\Delta ABA_1 = \Delta CBC_1$ (по катету и острому углу), откуда $AB = BC$.

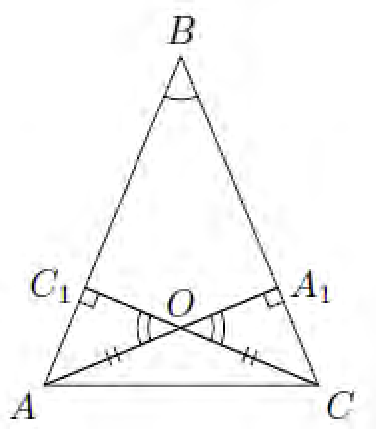

Рис. 4

(8—9 классы, средняя.) В треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle ADC = 120°$, $\angle DAB = 60°$.

Ответ. $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 30°$.

Решение. Так как $\angle ADC = 120°$, то $\angle ADB = 60°$. Значит, треугольник ADB равносторонний (и $\angle ABD = 60°$). Тогда $BD = AD = DC$ и треугольник ADC равнобедренный. Значит, $\angle DAC = \angle DCA = (180°–120°) : 2 = 30°$, откуда $\angle BAC = 90°$.

(9—10 классы, средняя.) У звезды $ACEBD$ (рис. 5) равны углы при вершинах A и B, углы при вершинах E и C, а также равны длины отрезков AC и BE. Докажите, что $AD = BD$.

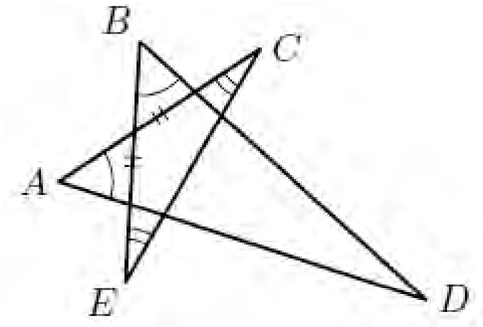

Рис. 5

Решение. Треугольники ACG и BEF равны (по стороне и двум углам, прилежащим к ней) (рис. 6). Следовательно, $\angle AGC = \angle BFE$ и $AG = BF$. По теореме о смежных углах $\angle FGD = \angle GFD$. Поэтому треугольник GFD равнобедренный ($GD = FD$). Следовательно, $AG + GD = BF + FD$, т. е. $AD = BD$.

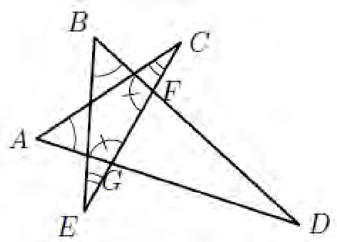

Рис. 6

(9 класс, средняя.) В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC. Найдите угол ABC, если $AC = 2AB$.

Ответ. $\angle ABC = 90°$.

Решение. Пусть точка D – середина стороны AC (рис. 7). Тогда $AD = AC/2 = AB$. Значит, треугольники ABE и ADE равны (сторона AE общая, $\angle BAE = \angle CAE$). Тогда $\angle ABC = \angle ADE = 90°$, так как ED – медиана равнобедренного треугольника AEC ($AE = EC$ по условию) и, значит, его высота.

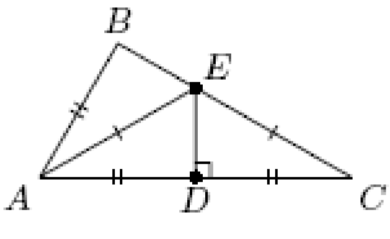

Рис. 7

(10—11 классы, средняя.) Параллелограмм двумя парами прямых, параллельных его сторонам, разбит на девять параллелограммов (рис. 8). Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*, если площадь исходного параллелограмма равна S_1, а площадь центрального (закрашенного) параллелограмма равна S_2.

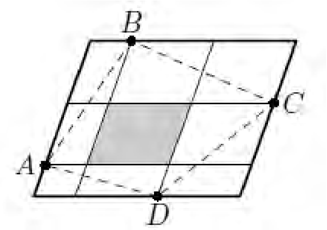

Рис. 8

Ответ. $\dfrac{S_1 + S_2}{2}$.

Решение. Четырёхугольник *ABCD* складывается из закрашенного параллелограмма и половинок параллелограммов, составляющих рамку.

(10—11 классы, сложная.) Точка *D* – середина стороны *AC* треугольника *ABC*, *DE* и *DF* – биссектрисы треугольников *ADB* и *CDB*. Докажите, что *EF* ∥ *AC*.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $BE : EA = BD : DA = BD : DC = BF : FC$. Отсюда следует, что *EF* ∥ *AC*.

(10—11 классы, сложная.) В треугольнике *ABC* биссектрисы углов *A* и *B* пересекают описанную окружность в точках *K* и *L*. Отрезки *AK* и *BL* пересекаются в точке *X* и делятся этой точкой в равных отношениях, считая от вершин треугольника. Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный.

Решение. Из условия следует подобие треугольников *AXB* и *KXL* – по первому признаку ($\angle AXB = \angle KXL$). Отсюда $\angle BAK = \angle LKA$, но $\angle LKA = \angle ABL$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Так как *AK* и *BL* – биссектрисы, то отсюда следует, что $\angle A = \angle B$ (рис. 9).

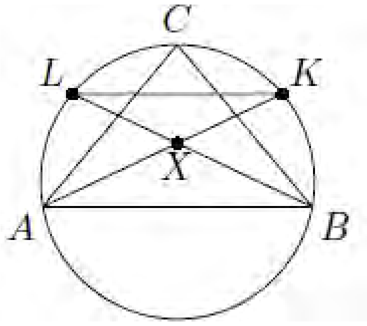

Рис. 9

Комбинаторика

(9—10 классы, сложная.) Каких натуральных чисел от 1 до 1 000 000 больше: делящихся на 11, но не делящихся на 13, или делящихся на 13, но не делящихся на 11?

Ответ. Чисел, делящихся на 11, но не делящихся на 13, среди чисел от 1 до 1 000 000 больше, чем чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 11.

Решение. Действительно, пусть количества этих чисел равны A и B соответственно, а количество чисел от 1 до 1 000 000, кратных и 11, и 13, равно C. Тогда $A + C$ – количество чисел, делящихся на 11, а $B + C$ – делящихся на 13. Ясно, что $A + C > B + C$. Поэтому $A > B$.

(10—11 классы, средняя.) Электронные часы показывают время от 00:00:00 до 23:59:59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно три цифры 7?

Ответ. 72 секунды.

Решение. Если на табло горят цифры *ab.cd.mn*, то $a \neq 7, c \neq 7, m \neq 7$.

Поэтому $b = d = n = 7$.

Но тогда $a = 0$ или 1, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Всего получается $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ подходящих набора цифр, а каждый набор горит 1 секунду.

1.11. Рекомендуемая литература для подготовки заданий школьного этапа всероссийской математической олимпиады

Журналы

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Муниципальные олимпиады Московской области по математике. – М.: МЦНМО, 2019.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В., Кукина Е.Г., Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007—2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н., Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. — 2-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998 – 2006. – М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006 – 2013. – М.: МЦНМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. — 3-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. — 6-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. —5-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. —8-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2014.

Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. — 3-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2014.

Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка. — 7-е изд., стереотип.— М.: МЦНМО, 2013.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М.: ГИФМЛ, 1958.

Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАЗРАБОТКЕ ЗАДАНИЙ И ТРЕБОВАНИЙ К ОРГАНИЗАЦИИ И ПРОВЕДЕНИЮ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА

2.1. Введение

Настоящие требования к проведению муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников (далее – олимпиада) по математике разработаны на основе Порядка.

Настоящие методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь региональным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения муниципального этапа олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания муниципального этапа, описание подходов к разработке заданий региональными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы комплектов олимпиадных заданий для проведения муниципального этапа олимпиады с решениями. В них включены задачи, предлагавшиеся на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны либо включённые в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные Методические рекомендации окажутся полезными при проведении муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в его проведении. В случае необходимости дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в Центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2020/21 учебном году утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 03 июля 2020 г.).

2.2. Основные задачи

На муниципальном этапе происходят изменения в целях олимпиады. Она теперь направлена не только на популяризацию математики и математических знаний. Анализ её результатов позволяет сравнивать качество работы с учащимися в различных школах, устанавливать уровень подготовки учащихся всего региона, определять направления работы с одарёнными школьниками в регионе. При этом усиливается мотивирующая роль олимпиады, когда у её участников появляется возможность сравнения своих математических способностей и олимпиадных достижений с аналогичными способностями и достижениями учащихся не только своей школы, но и других школ. Участники получают дополнительные стимулы для регулярных занятий математикой в кружках и на факультативах. Кроме того, муниципальный этап олимпиады является серьёзным отборочным соревнованием, поскольку по его итогам из большого числа сильнейших школьников различных муниципальных образований формируется состав участников регионального этапа.

Соответственно меняется и характер заданий олимпиады. Они предполагают знакомство участников со спецификой олимпиадных задач по математике: умение строить цепочки логических рассуждений, доказывать утверждения. Стилистически задания ещё в большей по сравнению со школьным этапом степени начинают отличаться от заданий повышенной трудности, включаемых в школьные учебники по математике, что предполагает психологическую готовность участников олимпиады к таким заданиям. Наконец, большое количество обладающих математическими способностями участников муниципального этапа олимпиады (в особенности в крупных муниципальных образованиях) предполагает заметно более высокий уровень сложности заданий.

Таким образом, основными целями муниципального этапа олимпиады являются формирование и закрепление интереса математически способных обучающихся к регулярным дополнительным занятиям математикой, повышение качества работы учителей математики в школах и развитие системы работы с одарёнными детьми в регионе, отбор наиболее способных школьников в каждом муниципальном образовании, формирование регионального списка наиболее одарённых учащихся.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на муниципальном этапе олимпиады.

2.3. Порядок и требования к организации и проведению муниципального этапа олимпиады

При проведении муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике необходимо руководствоваться Порядком.

Олимпиада проводится для учащихся параллелей 7—11 классов. Рекомендуется проведение муниципального этапа олимпиады и для параллели 6 класса, в особенности в тех регионах, где развита система дополнительного образования (например, проводятся кружки при университетах). Кроме того, участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады. Таким образом, участники школьного этапа олимпиады, выступавшие за более старшие классы по отношению к тем, в которых они проходят обучение, на муниципальном этапе также выполняют задания для более старших классов.

В муниципальном этапе олимпиады принимают участие участники школьного этапа олимпиады текущего учебного года, набравшие необходимое для участия в муниципальном этапе олимпиады количество баллов, установленное организатором муниципального этапа олимпиады. Кроме того, участниками олимпиады являются обучающиеся, ставшие победителями и призѐрами муниципального этапа олимпиады предыдущего года, при условии, что они продолжают обучение в общеобразовательных учебных заведениях. Вышесказанное означает **недопустимость ограничения числа участников олимпиады от одной образовательной организации**.

Рекомендуемая продолжительность олимпиады: для учащихся 6 классов – 3 часа; для учащихся 7—11 классов – 3—4 часа.

Во время олимпиады участники:

— должны соблюдать установленный порядок проведения олимпиады;

— должны следовать указаниям организаторов;

— не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории;

— не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой.

При установлении факта нарушения участником олимпиады Порядка или использования во время тура запрещѐнных источников информации решением оргкомитета соответствующего этапа олимпиады такой участник лишается возможности дальнейшего участия в олимпиаде.

Олимпиада должна проходить как абсолютно объективное, беспристрастное и честное соревнование с высоким уровнем качества проверки работ участников и удобными условиями работы для участников. Для достижения этих целей необходимо сделать следующее:

а) Работы участников перед проверкой обязательно кодируются. Наиболее удобной формой кодирования является запись шифра в формате «класс—номер участника» (например, 9-01, 9-02, …). Декодирование работ осуществляется **после** составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призѐров олимпиады.

б) Жюри муниципального этапа олимпиады формируется из числа педагогических, научно-педагогических работников, руководящих работников образовательных организаций, аспирантов, ординаторов, ассистентов-стажѐров, победителей и призѐров международных олимпиад школьников и победителей заключительного этапа всероссийской олимпиады школьников по соответствующим общеобразовательным предметам, а также специалистов в области знаний, соответствующих предмету олимпиады. Работа преподавателя в системе дополнительного образования, в том числе с участниками муниципального этапа, не может быть основанием для отказа от его включения в состав методических комиссий и жюри.

С учѐтом Постановления Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 30.06.2020 г. № 16 «Об утверждении санитарно-эпидемиологических правил СП 3.1/2.4 3598-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к устройству, содержанию и организации работы образовательных организаций и других объектов социальной инфраструктуры для детей и молодѐжи в условиях распространения новой коронавирусной инфекции (COVID-19)» допускается проведение муниципального этапа олимпиады с использованием информационно-коммуникационных технологий.

2.4. Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для муниципального этапа

Задания муниципального этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания должны носить творческий характер и проверять не степень усвоения участником олимпиады различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. Бóльшая часть заданий должна включать в себя элементы научного творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить большинству участников возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись около 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим – 20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.
4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.
5. Формулировки задач должны быть корректными, чѐткими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, незнакомые учащимся данной возрастной категории.
6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4—6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в среднем звене школы), комбинаторику. Так, в варианты для 6 класса рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие чѐтности; в 7—8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9—11 классах последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.
7. Желательно составление заданий олимпиады из **новых** задач, специально подготовленных методической комиссией для олимпиады. В случае если задания

олимпиады подбираются из печатных изданий и интернет-ресурсов, необходимо, чтобы эти источники были неизвестны участникам олимпиады. При этом задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких её участников со всеми задачами, включёнными в вариант. Олимпиада должна выявлять не энциклопедичность знаний участника, а его математические способности.

2.5. Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ участников в разных муниципальных образованиях необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7 - балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6—7	Верное решение. Имеются небольшие недочѐты, в целом не влияющие на решение
5—6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
2—3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0—1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведѐнного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень еѐ правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачѐркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при еѐ выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объѐму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

2.6. Перечень средств обучения и воспитания, используемых при проведении муниципального этапа Олимпиады

Тиражирование заданий осуществляется с учѐтом следующих параметров: листы бумаги формата А5 или А4, чѐрно-белая печать.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуются отдельные листы бумаги формата А4. Для черновиков выдаются отдельные листы. Записи на черновиках не учитываются при проверке выполненных олимпиадных заданий. Черновики сдаются вместе с выполненными заданиями. Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или чѐрными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелѐными чернилами.

2.7. Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешѐнных к использованию во время проведения олимпиады

Участникам во время проведения олимпиады в аудитории запрещено иметь при себе средства связи, электронно-вычислительную технику, фото-, аудио- и видеоаппаратуру, справочные материалы, письменные заметки и иные средства хранения и передачи информации.

2.8. Показ работ и проведение апелляций

Каждый участник олимпиады имеет право ознакомиться с результатами проверки своей работы. Рекомендуемое время проведения показа работ – в течение трѐх ближайших учебных дней после проведения олимпиады. Перед проведением показа работ жюри должно ознакомить участников олимпиады с решениями задач и критериями оценивания: в устной форме путѐм проведения разбора вариантов (отдельно для каждого класса) либо путѐм предоставления участникам решений заданий и критериев оценивания в печатном виде. При проведении показа работ члены жюри дают участнику олимпиады аргументированные пояснения по снижению баллов.

В случае несогласия участника олимпиады с выставленными баллами он подаѐт апелляцию. Процедура подачи апелляции определяется организатором муниципального этапа олимпиады в соответствии с Порядком. Важно отметить, что баллы в работах могут быть изменены только после рассмотрения апелляции и принятия положительного решения по их изменению. При проведении показа работ баллы могут быть изменены только в случае установления технической ошибки по внесению баллов в протокол. При этом повышение баллов возможно только путѐм подачи участником олимпиады апелляции.

2.9. Тематика заданий муниципального этапа олимпиады

Ниже приведена тематика олимпиадных заданий для разных классов.

В приведѐнном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

6—7 КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Чѐтность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции $y = kx$, $y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и еѐ свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

8—9 КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Чѐтность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и еѐ свойства. Многочлены. Формулы сокращѐнного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трѐхчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трѐхчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и еѐ свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырѐхугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и еѐ свойства. Площади четырѐхугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и еѐ свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

10—11 КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Чѐтность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа.

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращѐнного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, чѐтность и нечѐтность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков заимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, еѐ свойства и график. Логарифмическая функция, еѐ свойства и график. Степенная функция, еѐ свойства и график.

Производная, еѐ геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и еѐ свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и еѐ свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трѐх перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

2.10. Типовые задания муниципального этапа олимпиады

Привед̀нные типовые задания муниципального этапа олимпиады не могут в одинаковой степени устанавливать планку сложности для всех регионов в силу заметной разницы в уровне развития в различных регионах олимпиадного движения, наличия или отсутствия развитой системы городских математических кружков, наличия или отсутствия в городах сильных математических школ и т. п.. Региональным методическим комиссиям при разработке заданий олимпиады следует учитывать уровень математического образования на территории. Предлагаемые задания демонстрируют типовую структуру заданий муниципального этапа олимпиады, примерный (усредн̀нный) уровень их сложности, тематику.

Запрещается использовать для проведения олимпиады привед̀нный ниже комплект заданий, так как данные Методические рекомендации являются открытыми и участники олимпиады могли ознакомиться с ними.

Условия задач

6 класс

6.1. В классе 30 учеников. На контрольной по математике некоторые ученики класса получили «5», некоторые – «4», некоторые – «3», некоторые – «2». Сумма полученных оценок оказалась равной 130. А чему равнялась бы сумма полученных оценок, если бы все, получившие «5», получили бы «2», получившие «4» получили бы «3», получившие «3» получили бы «4», а получившие «2» получили бы «5»?

6.2. В ралли участвовало 6 машин. Они стартовали одновременно. В каждый момент обгона одной машины другой делалась фотография этих двух машин (тройных обгонов не было, момент старта обгоном не считается). Могло ли оказаться, что первая машина оказалась ровно на 4 фотографиях, вторая – ровно на 5, третья – ровно на 6, четвѐртая – ровно на 7, пятая – ровно на 8 и шестая – ровно на 9 фотографиях?

6.3. Пункты A, B, C, D расположены в вершинах прямоугольника $ABCD$, его стороны – дороги. Первая машина проехала за час по маршруту $A \to B \to C \to D$, а вторая проехала за час по маршруту $A \to D \to C \to B$. Через какое время машины встретятся, если они одновременно выедут из пункта A в разных направлениях и поедут по сторонам прямоугольника $ABCD$? (Скорости обеих машин постоянны.)

6.4. Когда из семизначного числа A вычли сумму всех, кроме одной, его цифр, получили число 1 234 515. А какое число получится, если из A вычесть сумму всех его цифр, кроме первой?

6.5. Из 7 внешне одинаковых монет 2 фальшивые монеты легче настоящих и весят одинаково. Настоящие монеты также весят одинаково. Можно ли найти обе фальшивые монеты за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь?

7 класс

7.1. Семь последовательных натуральных чисел как-то расставили по кругу. После этого для каждой пары соседних чисел вычислили разность между ними (из большего числа вычли меньшее). Могли ли пять подряд идущих разностей (из семи) равняться числам 2, 1, 6, 1, 2 (в указанном порядке)?

7.2. Пункты A, B, C, D расположены в вершинах прямоугольника $ABCD$, его стороны и диагонали AC и BD – дороги. Первая машина проехала за час по маршруту $B \to C \to A \to D$, а вторая проехала за час по маршруту $D \to B \to C \to A$. Через какое время машины встретятся, если они одновременно выедут из пункта C: первая по маршруту $C \to B \to D$, вторая – по маршруту $C \to A \to D \to B$? (Скорости обеих машин постоянны.)

7.3. Можно ли так расставить по кругу сто чисел 1 и сто одно число –1 так, чтобы произведение любых трѐх подряд идущих чисел было положительным?

7.4. Найдите все решения ребуса КОРОВА + КОРОВА = МОЛОКО. Разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые.

7.5. В зале находятся лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый указал на одного из присутствующих и сказал: «Он лжец». Оказалось, что про каждого из находящихся в зале кто-то такую фразу сказал. Мог ли в зале быть ровно 101 человек?

8 класс

8.1. Докажите, что для любых натуральных чисел *a* и *b* число $4a^2+4ab+4a+2b+1$ является составным.

8.2. Пятеро друзей сыграли друг с другом по несколько партий (не обязательно одинаковое количество) в настольный теннис (ничьих не бывает). После игр первый заметил, что у него побед на 4 больше, чем поражений; второй и третий заметили, что у каждого из них поражений на 5 больше, чем побед. Четвѐртый заметил, что у него побед столько же, сколько поражений, а пятый — что он с каждым из остальных сыграл поровну партий. Мог ли пятый выиграть во всех партиях?

8.3. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *AL*. На стороне *AC* взята точка *P* так, что *LA* – биссектриса угла *BLP*. Докажите, что если *BL* = *CP*, то угол *ABC* в два раза больше угла *BCA*.

8.4. В турнире по шахматам каждый из 10 игроков сыграл с каждым по одной партии, и Петя занял последнее место (набрал меньше очков, чем любой другой участник). Потом двоих игроков дисквалифицировали, все очки, набранные во встречах с ними, аннулировали, и этих двух игроков исключили из таблицы. Оказалось, что в результате Петя стал победителем турнира (набрал больше очков, чем любой другой участник). Сколько очков в итоге (после дисквалификации игроков) мог набрать Петя? За победу даѐтся 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0 очков.

8.5. Даны положительные числа *a*, *b*, *c*, *d*. Известно, что любые два из них отличаются не более чем в 3 раза. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2<2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.

9 класс

9.1. Найдите отношение $\frac{b^2}{ac}$, если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 4 раза больше другого ($ac\neq 0$).

9.2. Пусть *x*, *y*, *z* – ненулевые числа. Докажите, что среди неравенств $x+y>0$, $y+z>0$, $z+x>0$, $x+2y<0$, $y+2z<0$, $z+2x<0$ по крайней мере два неверные.

9.3. По кольцевой трассе одновременно из одной точки в одном направлении стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 5 минут, второй – за 7 минут, третий – за 9 минут. Через какое наименьшее время все велосипедисты вновь окажутся в одной точке трассы? Скорости всех велосипедистов постоянны.

9.4. В треугольнике *ABC*, в котором *AB* > *AC*, проведена биссектриса *AL*. На стороне *AB* выбрана точка *K* так, что *AK* = *AC*. Пусть *O* – центр окружности, описанной около треугольника *ALB*. Докажите, что углы *KCB* и *ABO* равны.

9.5. Шахматная фигура кентавр ходит попеременно как конь и как белая пешка (т. е. строго на одну клетку вверх). Может ли она, начав с некоторой клетки шахматной доски 8×8, обойти все клетки, побывав на каждой клетке ровно по разу, если первый ход она делает как пешка? Стартовая клетка считается обойдѐнной.

10 класс

10.1. Графики функций $f(x)=ax^2+bx$, $g(x)=cx^2+dx$, $f_1(x)=ax+b$, $g_1(x)=cx+d$ пересекаются в одной точке с отрицательной абсциссой. Докажите, что если $ac\neq 0$, то $bc=ad$.

10.2. В турнире по шахматам каждый из 10 игроков сыграл с каждым по одной партии, и Петя занял последнее место (набрал меньше очков, чем любой другой участник). Потом одного игрока дисквалифицировали, все очки, набранные во встречах с ним, аннулировали, и этого игрока исключили из таблицы. Мог ли в результате Петя стать победителем турнира (набрать больше очков, чем любой другой участник)? За победу даѐтся 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0 очков.

10.3. Каждый из 13 ребят задумал целое число. Оказалось, что сумма задуманных чисел равна 125. После этого каждый изменил своѐ число: либо разделил его на 3, либо умножил его на 5. Могла ли сумма полученных 13 чисел равняться 175?

10.4. Числа *x*, *y*, *z* таковы, что $2x>y^2+z^2$, $2y>x^2+z^2$, $2z>y^2+x^2$. Докажите, что $xyz<1$.

10.5. Четырѐхугольник *ABCD* вписан в окружность Ω с центром *O*, при этом *BD* – диаметр окружности. Лучи *AB* и *DC* пересекаются в точке *S*. Окружность ω, проходящая через точки *A*, *O*, *C*, пересекает отрезок *CD* в точке *M* $(M\neq C)$. Докажите, что *M* – середина отрезка *DS*.

11 класс

11.1. Даны два пятизначных числа без цифр 0 и 1 в своей записи. Модуль их разности – четырёхзначное число S. Известно, что если у одного из исходных чисел каждую цифру уменьшить на 1, то модуль разности станет равным 10 002. Какие значения может принимать число S?

11.2. Разность возрастающей арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, является натуральным числом, оканчивающимся на 2019. Могут ли три последовательных члена этой прогрессии быть квадратами натуральных чисел?

11.3. На деревянной стене отметили вершины треугольника ACE. Перпендикулярно стене вбили гвозди так, что наружу торчат части гвоздей длин: $AB = 1$, $CD = 2$, $EF = 4$ (B, D, F – шляпки гвоздей). Могли ли расстояния между шляпками гвоздей оказаться равными $BD=\sqrt{2}$, $DF=\sqrt{5}$, $FB=\sqrt{13}$?

11.4. Известно, что $x+0{,}5>y^2+z^2$. Докажите, что $x+y+z>-1$.

11.5. В каждой из 320 коробок лежит либо 6, либо 11, либо 15 шариков, причём все три типа коробок присутствуют. Верно ли, что гарантированно можно выбрать несколько коробок, в которых суммарно ровно 1001 шарик?

Решения задач

6 класс

6.1. Ответ. 80.

Каждый из учеников класса за две контрольные (состоявшуюся и гипотетическую) получил бы сумму оценок, равную 7. Значит, для всех 30 учеников класса сумма оценок была бы равна 210. И сумма полученных оценок за вторую контрольную равнялась бы 210 — 30 = 80.

6.2. Ответ. Не могло.

Так как на каждой фотографии в момент обгона две машины, то каждая фотография учитывается при подсчѐте два раза. Значит, суммарное количество появлений машин на фотографиях должно быть равно удвоенному числу фотографий, т. е. чѐтному числу. Однако $4+5+6+7+8+9=39$ – нечѐтно.

6.3. Ответ. Через 40 минут.

За один час вместе обе машины проехали бы трижды сторону AD и трижды сторону AB, так как одна проезжает за час две стороны, равные AD, и одну, равную AB, а вторая проезжает за час две стороны, равные AB, и одну, равную AD. Значит, за треть часа, т. е. за 20 минут вместе машины проедут одну сторону, равную AD, и одну – равную AB. А весь периметр прямоугольника они проедут за вдвое больший промежуток времени.

6.4. Ответ. 1 234 513.

Сумма цифр числа A не превосходит 63. Поэтому число A имеет вид $\overline{12345ab}$. Получение числа 1 234 515 можно описать так: из числа A вычли сумму $S(A)$ всех его цифр, а потом к результату прибавили одну из цифр x исходного числа A.

То есть $\overline{12345ab}-(1+2+3+4+5+a+b)+x=1234515$.

Отсюда $\overline{ab}-(15+a+b)+x=15$, $10a+b-(15+a+b)+x=15$, $9a+x=30$.

Поэтому не вычитали цифру $x=3$. А если не вычитать 1 (первую цифры числа A) вместо 3, результат получится на 2 меньше, чем при вычитании 3.

Замечание. Есть и другие решения, в частности использующее признак делимости на 9.

6.5. Ответ. Можно.

Первое решение. Обозначим монеты A, B, C, D, E, F, G. Первым взвешиванием сравним веса монет A, B, C и монет D, E, F. Возможны два случая.

1. Веса равны. Тогда в каждой тройке ровно одна фальшивая монета. За одно взвешивание из трѐх монет, среди которых ровно одна фальшивая, легко найти фальшивую. Для этого достаточно сравнить веса любых двух монет. Если веса различны, то лѐгкая монета фальшивая, если веса равны, то фальшивой является оставшаяся монета. Значит, вторым и третьим взвешиванием мы находим две фальшивые монеты.

2. Одна из троек, например, A, B, C, весит меньше. Тогда среди монет D, E, F нет фальшивых. Значит, обе фальшивые монеты содержатся среди четырѐх монет A, B, C, G. Сравним веса монет A и B. Если их веса равны, то обе эти монеты либо настоящие (тогда C, G фальшивые), либо фальшивые (тогда C, G настоящие). Значит, достаточно сравнить, например, веса монет A и C. И тогда мы найдѐм пару фальшивых. Если же одна из монет A и B легче другой, то вторым взвешиванием мы нашли одну фальшивую монету. Третьим взвешиванием мы находим фальшивую монету среди C, G.

Второе решение. Обозначим монеты A, B, C, D, E, F, G. Первым взвешиванием сравним веса монет A, B и монет C, D. Возможны два случая.

1. Веса равны. Тогда в каждой паре либо фальшивых монет нет, либо ровно одна фальшивая. Сравним веса монет A и B. Если они различны, то мы нашли фальшивую монету, и ещё за одно взвешивание найдём фальшивую среди C и D. Если же веса монет A и B равны, то обе фальшивые монеты находятся среди E, F, G. Взвесив любые две из них, мы найдём обе фальшивые.

2. Веса различны. Пусть, для определѐнности, пара монет A, B легче. Тогда обе монеты C, D настоящие, а среди монет A, B либо одна, либо две фальшивые. Сравним веса монет A и B. Если они одинаковы, то мы нашли обе фальшивые монеты. Если же веса различны, то мы нашли фальшивую монету, а ещѐ одна фальшивая находится среди E, F, G. Ещѐ за одно взвешивание (взвесив, например, E и F) мы найдѐм оставшуюся фальшивую монету.

7 класс

7.1. Ответ. Не могли.

Вычтем из всех данных чисел наименьшее из них. Эта операция не изменит разности между числами. Таким образом, можно считать, что по кругу расставили числа $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 3$, $E = 4$, $F = 5$, $G = 6$. Разность 6 – максимальная из возможных разностей, и она может быть получена только как разность $G - A$. Стоящие рядом с разностью 6 единицы могут быть получены, только если рядом с A стоит B, а рядом с G стоит F. Для того чтобы получить разности 2, рядом с F должно стоять число D и рядом с B также должно стоять число D. А это невозможно.

7.2. Ответ. Через 40 минут.

Диагонали прямоугольника имеют одинаковую длину и длиннее любой его стороны. За один час вместе обе машины проехали бы трижды сторону BC и трижды диагональ, так как одна проезжает за час две стороны, равные BC, и одну диагональ, а вторая проезжает за час две диагонали и одну сторону, равную BC. Значит, за треть часа, т. е. за 20 минут, вместе машины проедут одну сторону, равную BC, и одну – равную диагонали. А весь описанный маршрут до встречи на BD они проедут за вдвое больший промежуток времени.

7.3. Ответ. Нельзя.

Предположим, что такое возможно. Так как всего чисел $100 + 101 = 201 = 3 \cdot 67$, то разобьѐм их все на 67 троек подряд идущих чисел. В каждой тройке произведение чисел положительно, поэтому произведение всех чисел также положительно. Но произведение 100 чисел 1 и 101 числа –1 равно –1, т. е. отрицательно.

7.4. Ответ. Два решения (302 015 + 302 015 = 604 030 и 304 015 + 304 015 = 608 030).

Равенство в разряде сотен могло быть только в двух случаях: 0 + 0 = 0, т. е. О = 0, такое могло быть, только если не было переносов из десятков в сотни, а также если О = 9 (в случае переноса единицы из десятков в сотни). Но сумма А + А заканчивается на О, поэтому О – чѐтная цифра, значит, О = 0, и тогда А = 5.

Далее, ни в К + К, ни в Р + Р, ни в В + В нет перехода через десяток (слагаемые и сумма шестизначные и нет соответствующих переносов), значит, все эти цифры не больше 4 (и ненулевые: О = 0). При этом К = 3, так как В + В + 1 = К. Отсюда В = 1. Осталось два варианта для цифры Р, и оба подходят.

7.5. Ответ. Не могло.

Предположим, что в зале мог быть ровно 101 человек. Так как каждый указал на одного из присутствующих, а на каждого из присутствующих кто-то указал, то на каждого указал ровно один из присутствующих. Заметим, что рыцарь мог указать только на лжеца, а лжец – только на рыцаря.

Посмотрим теперь на какого-нибудь рыцаря *A*. Он указал на какого-то лжеца. Тот указал на какого-то рыцаря. Продолжая эту цепочку, мы получим, что рано или поздно какой-то лжец укажет на рыцаря *A*, так как на других людей в цепочке уже кто-то указывает. Поэтому все присутствующие разобьются на замкнутые цепочки (циклы) чѐтной длины (возможно, длины 2). Но число 101 нечѐтно. Противоречие.

8 класс

8.1. Заметим, что $4a^2+4ab+4a+2b+1=(4a^2+4a+1)+2b+4ab=$ $=(2a+1)^2+2b(2a+1)=(2a+1)(2a+2b+1)$. Так как числа a и b натуральные, то каждая из скобок больше 1. Поэтому число составное.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что $4a^2+4ab+4a+2b+1=(2a+b+1)^2-b^2$.

8.2. Ответ. Не мог.

Предположим, что пятый выиграл во всех партиях. В каждой партии один из игроков выигрывает, другой – проигрывает. Поэтому количество побед должно равняться количеству поражений. Из высказываний первых четырѐх ребят следует, что у них побед на 6 меньше, чем поражений. Значит, количество побед пятого игрока должно равняться 6 (он не проигрывал). Но количество его побед должно делиться на 4, так как, по его утверждению, он одержал равное количество побед над каждым из соперников, а 6 на 4 не делится. Противоречие.

8.3. Из условия следует, что треугольники *APL* и *ABL* равны по второму признаку (см. рис. 1). Тогда $PL = BL$. Но по условию $BL = CP$. Значит, $CP = PL$. Тогда $\angle PLC = \angle PCL$, и внешний угол *APL* треугольника *CPL* в два раза больше угла *PCL*. С другой стороны, $\angle ABC = \angle ABL = \angle APL$. Утверждение доказано.

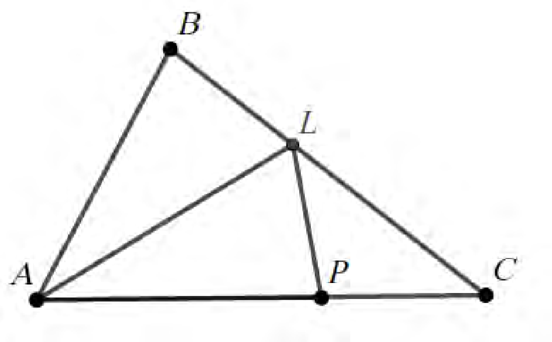

Рис. 1

8.4. Ответ. 4 очка.

В турнире с 10 игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ очков. Поэтому найдется игрок, набравший не более $45 : 10 = 4{,}5$ очков. Значит, игрок, занявший абсолютное последнее место, набрал не более 4 очков. Аналогично, в турнире с $10 - 2 = 8$ игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ очков. В таком турнире найдѐтся игрок, набравший не менее $28 : 8 = 3{,}5$ очков. Значит, игрок, занявший абсолютное первое место (после применѐнной дисквалификации), набрал не менее 4 очков. Таким образом, Петя мог набрать только 4 очка.

Замечание. Описанный в условии турнир возможен. Приводить пример турнира не требуется, так как из условия следует, что такой турнир существует.

8.5. Так как числа различаются не более чем в 3 раза, то каждое из них не больше суммы остальных. Более того, если $a \le b \le c \le d$, то $a < b + c + d$, $b < a + c + d$, $c < a + b + d$, $d \le a + b + c$. Умножив первое неравенство на *a*, второе – на *b*, третье – на *c*, четвѐртое – на

d, получим $a^2 < ab + ac + ad$, $b^2 < ba + bc + bd$, $c^2 < ca + cb + cd$, $d^2 \le da + db + dc$. Сложив полученные неравенства, получим требуемое.

Замечание. Существуют и другие решения.

9 класс

9.1. Ответ. $\frac{25}{4}$.

Пусть уравнение имеет корни x_1, x_2 ($x_1 = 4x_2$). Тогда из теоремы Виета получаем $x_1 + x_2 = 5x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = 4x_2^2 = \frac{c}{a}$. Отсюда $x_2 = -\frac{b}{5a}$, и $4x_2^2 = \frac{c}{a} = 4\left(-\frac{b}{5a}\right)^2 = \frac{4b^2}{25a^2}$, т. е. $\frac{c}{a} = \frac{4b^2}{25a^2}$. Значит, $c = \frac{4b^2}{25a}$. Поэтому $\frac{b^2}{ac} = \frac{25}{4}$.

9.2. Первое решение. Предположим противное. Среди трѐх ненулевых чисел найдутся два одного знака – пусть это x и y. Тогда одно из неравенств $x + y > 0$ и $x + 2y < 0$ неверно. Если все три числа имеют один знак, то мы таким образом найдѐм три неверных неравенства. В противном случае среди трѐх пар (x, y), (y, z), (z, x) найдѐтся пара, в которой первое число отрицательно, а второе положительно; пусть это пара (a, b). Тогда одно из неравенств $a + b > 0$ и $a + 2b < 0$ также неверно, ибо $a + b < a + 2b$. Найденные нами неверные неравенства, очевидно, различны.

Второе решение. Предположим, что верно хотя быть пять неравенств. Тогда верны все три неравенства из первых трѐх и хотя бы два из последних трѐх или хотя бы два из первых трѐх и все три последних неравенства.

В первом случае, не ограничивая общности, считаем, что из последних трѐх верны четвѐртое и пятое неравенства. Но тогда $x + 2y + y + 2z = x + 3y + 2z < 0$. С другой стороны, $x + 3y + 2z = (x + y) + 2(y + z) > 0$. Противоречие.

Во втором случае, не ограничивая общности, считаем, что $x + y > 0$, $y + z > 0$.

Но тогда, как и в первом случае, $x + 2y + y + 2z = x + 3y + 2z < 0$

и $x + 3y + 2z = (x + y) + 2(y + z) > 0$. Противоречие.

Таким образом, из указанных неравенств хотя бы два неверные.

Замечание. Тройка чисел, для которой верными являются четыре из приведѐнных неравенств, существует. Например: $x = 9, y = 3, z = -2$. Верными являются первое, второе, третье и пятое неравенства.

9.3. Ответ. 157,5 минут.

Пусть S – длина трассы, тогда скорость первого велосипедиста равна $S/5$, второго – $S/7$, третьего – $S/9$. Поэтому время T до встречи всех велосипедистов определяется равенствами $T\left(\frac{S}{5}-\frac{S}{7}\right)=nS$, $T\left(\frac{S}{7}-\frac{S}{9}\right)=mS$, где n, m – натуральные числа. Отсюда $\frac{n}{m}=\frac{9}{5}$. Наименьшее подходящее n равно 9. Значит, $T\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)=9$. Тогда минимальное время есть $T=9\cdot\frac{7\cdot 5}{7-5}=157{,}5$ минут.

Замечание. Первая встреча велосипедистов произойдѐт не в стартовой точке.

9.4. Первое решение. Вписанный угол BAL в два раза меньше центрального угла BOL, значит, $\angle BOL=2\angle BAL=\angle KAC$ (см. рис. 2). Значит, углы KAC и BOL – равные углы при вершинах равнобедренных треугольников KAC и BOL, поэтому $\angle AKC=\angle OBC$. Но угол AKC – внешний для треугольника KBC, поэтому $\angle AKC=\angle ABC+\angle KCB$, в частности $\angle OBC=\angle AKC>\angle ABC$, поэтому точка O лежит по другую сторону от AB, нежели C. С другой стороны, $\angle OBC=\angle ABC+\angle ABO$, откуда и следует утверждение задачи.

Второе решение. Обозначим углы треугольника $\angle BAC=2\alpha$, $\angle ABC=2\beta$, $\angle ACB=2\gamma$; по условию $\beta<\gamma$. Тогда $\angle ALB=\angle ACL+\angle LAC=\alpha+2\gamma>90^\circ$, поэтому O лежит по другую сторону от AB, нежели L, и $\angle OBA=\angle OAB=(180^\circ-\angle AOB)/2=\angle ALB-90^\circ=(\alpha+2\gamma)-(\alpha+\beta+\gamma)=\gamma-\beta$. С другой стороны, в равнобедренном треугольнике AKC имеем $\angle ACK=\angle AKC=(180^\circ-\angle KAC)/2=90^\circ-\alpha=\beta+\gamma$, откуда $\angle KCB=\angle ACB-\angle ACK=2\gamma-(\beta+\gamma)=\gamma-\beta=\angle OBA$, что и требовалось.

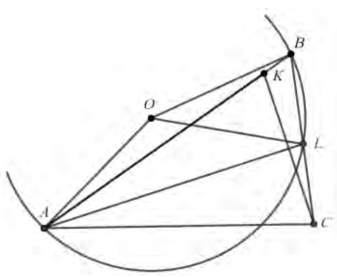

Рис. 2

9.5. Ответ. Не может.

Рассмотрим шахматную раскраску нашей доски. Заметим, что и пешка, и конь при своѐм ходе меняют цвет клетки. Пусть кентавр ходом пешки начал обход доски с белой клетки. Тогда он попадѐт на чѐрную клетку, и следующим ходом (коня) он попадѐт на белую клетку. Значит, кентавр всегда ходом пешки будет ходить с белой клетки на чѐрную клетку. Однако в нижнем ряду доски есть чѐрные клетки. На них нельзя пойти ходом пешки, так как пешка по правилам ходит только вверх. А конь на эти клетки также попасть не может, поскольку он будет ходить только с чѐрных клеток на белые. Поэтому побывать на всех клетках доски не удастся.

10 класс

10.1. Найдѐм абсциссу x_0 точки пересечения $f(x)$ и $f_1(x)$: $ax^2+bx=ax+b \Leftrightarrow (ax+b)(x-1)=0$. То есть либо $x_0=1$, либо $x_0=-\frac{b}{a}$ ($ac\neq 0$). Так как по условию абсцисса точки пересечения отрицательна, $x_0\neq 1$. Значит, $x_0=-\frac{b}{a}$. Аналогично, рассмотрев $g(x)$ и $g_1(x)$, получим, что $x_0=-\frac{d}{c}$. Поэтому $-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}$, откуда получаем $bc=ad$.

10.2. Ответ. Не мог.

В турнире с 10 игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ очков. Поэтому найдѐтся игрок, набравший не более $45:10=4{,}5$ очков. Значит, Петя, занявший абсолютное последнее место, набрал не более 4 очков. Аналогично, в турнире с $10-1=9$ игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{9\cdot 8}{2}=36$ очков. Остальные 8 игроков набрали не менее 32 очков. Значит, найдѐтся игрок (отличный от Пети), набравший (после пересчѐта) не менее $32:8=4$ очков. Поэтому Петя не мог стать абсолютным победителем турнира.

10.3. Ответ. Не могла.

Предположим, что сумма могла стать равной 175. Умножим каждое из полученных чисел на 3 (тогда сумма станет равной 525). Это будет равносильно тому, что некоторые задуманные ребятами числа остались без изменений, а некоторые умножились на 15. Если число x умножается на 15, то сумма изменяется на $14x$, т. е. на число, кратное 14. Так как часть чисел не менялась, а часть умножалась на 15, то итоговая сумма изменилась на число, кратное 14. Однако изменение суммы, равное $525-125=400$, на 14 не делится. Противоречие.

10.4. Первое решение. Из условия следует, что числа x, y, z положительны. Заметим, что $y^2+z^2 \geq 2yz$ (это неравенство равносильно $(y-z)^2 \geq 0$). Отсюда $x > yz$. Аналогично, $y > xz$, $z > yx$. Перемножив неравенства (обе части неравенств положительны), получим $xyz > (xyz)^2$. Отсюда следует требуемое.

Второе решение. Из условия следует, что числа x, y, z положительны. Сложив первое и второе неравенства и преобразовав, получим $2 > (y-1)^2 + (x-1)^2 + 2z^2$. Отсюда $z^2 < 1$, т. е. $z < 1$. Аналогично, $x < 1$, $y < 1$. Перемножив неравенства, получаем требуемое.

10.5. Из условия следует, что четырѐхугольник $AOMC$ – вписанный (см. рис. 3), поэтому $\alpha = \angle OAC = 180° - \angle OMC = \angle OMD$ (смежные углы). Треугольник OAC – равнобедренный ($OA = OC$ как радиусы). Значит, $\angle OCA = \alpha$. Аналогично, $\angle OCD = \angle ODC = \beta$. Тогда $\angle ACD = \angle ACO + \angle OCD = \alpha + \beta$. Далее $\angle CAS = \angle CAB = \angle CDB = \beta$ (вписанные углы). Угол ACD – внешний для треугольника ACS, поэтому $\alpha + \beta = \angle ACD = \angle CAS + \angle CSA$, т. е. $\alpha + \beta = \beta + \angle CSA$. Итак, $\angle CSA = \alpha = \angle OMD$. Это означает, что $MO \parallel SA$. Но O – середина BD, значит, MO – средняя линия треугольника BSD. Следовательно, точка M – середина SD.

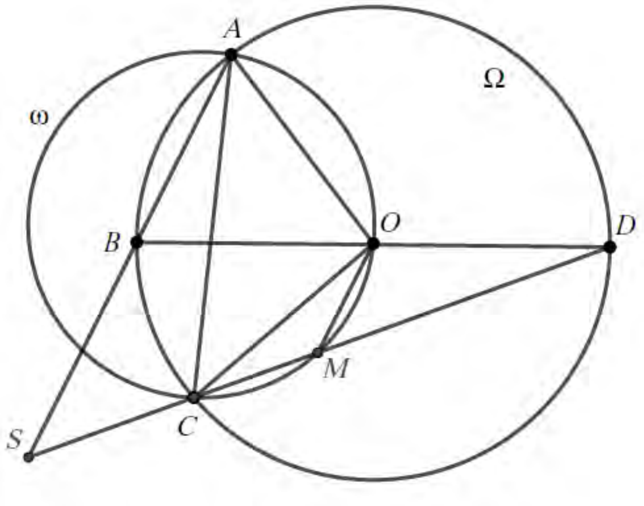

Рис. 3

11 класс

11.1. Ответ. 1109.

Пусть A и B – два данных числа, а C – число, полученное из B уменьшением каждой его цифры на 1, т. е. $C = B - 11111$. Если $A < C$, то тем более $A < B$, поэтому и модули разности – это числа $B - A$ и $C - A$. Однако по условию $C - A = 10002 > 10000 > B - A$ (это число четырёхзначное), т. е. $C > B$. Противоречие. Значит, $A > C$. Также невозможен случай $A > B$ (тогда $A - C = A - (B - 11111) = (A - B) + 11111 > 10002 = A - C$). Итак, возможен только случай $C < A < B$. И тогда $A - C = A - (B - 11111) = 10002$, т. е. $A - B = -1109$. Отсюда $S = |A - B| = B - A = 1109$.

Замечание. Приводить примеры подходящих чисел A, B не требуется, так как доказано, что возможен лишь один вариант ответа, а из условия следует, что подходящая пара существует.

11.2. Ответ. Не могут.

Предположим, что три подряд идущих члена прогрессии являются точными квадратами. Обозначим их $a^2 < b^2 < c^2$. Пусть разность прогрессии равна $d = 2k + 1$. Тогда $c^2 - a^2 = 2d = 4k + 2$. Но $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$, и оба сомножителя имеют одинаковую чѐтность (различаются на $2a$). Значит, $c^2 - a^2$ либо нечѐтно, либо делится на 4. Противоречие.

11.3. Ответ. Не могли.

Предположим, что расстояния между шляпками такие, какие приведены в условии. Из прямоугольной трапеции $ABDC$ вычислим длину боковой стороны AC: $AC^2 = BD^2 - (CD - AB)^2 = 2 - 1 = 1$, т. е. AC = 1. Аналогично найдѐм CE и EA: $CE = \sqrt{5 - (4 - 2)^2} = 1, EA = \sqrt{13 - (4 - 1)^2} = 2$. Таким образом, $AE = AC + CE$, откуда следует, что точка C лежит на отрезке AE (и является его серединой). Последнее означает, что точки A, C и E не могли быть вершинами треугольника. Противоречие.

11.4. Добавим к обеим частям данного неравенства $y+z$. Получим $x+y+z+0{,}5>y^2+y+z^2+z=(y+0{,}5)^2+(z+0{,}5)^2-0{,}5$.

Поэтому $x+y+z>(y+0{,}5)^2+(z+0{,}5)^2-1\geq -1$, что и требовалось.

11.5. Ответ. Верно.

Заметим, что $6\cdot 11\cdot 15=990$. Выберем одну коробку с 11 шариками. Покажем, что из оставшихся 319 коробок мы можем выбрать несколько, в которых суммарно ровно 990 шариков. Покажем, что эти 990 шариков можно получить, выбрав коробки одного типа. Действительно, если бы это не получилось сделать, коробок с 6 шариками было бы меньше $990:6=165$, т. е. не больше 164. Аналогично, коробок с 11 шариками не больше $990:11-1=89$, а коробок с 15 шариками не больше $990:15-1=65$. То есть коробок было бы не больше, чем $164+89+65=318$, а у нас их 319.

2.11. Рекомендуемая литература для подготовки заданий муниципального этапа всероссийской математической олимпиады

Журналы

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Муниципальные олимпиады Московской области по математике. – М.: МЦНМО, 2019.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В., Кукина Е.Г., Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007—2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н. ,Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. — 2-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. — М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998– 2006.– М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006– 2013 – М.: МЦНМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. —3-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. —6-е изд., стереотип. – М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. —5-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. — 8-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2014.

Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. — 3-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2014.

Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка). — 7-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М.: ГИФМЛ, 1958.

Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru

3. КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Дополнительную информацию по вопросам организации и проведения школьного и муниципального этапов всероссийской олимпиады школьников по математике можно получить по электронной почте, обратившись в Центральную предметно-методическую комиссию:

Агаханов Назар Хангельдыевич

E-mail: nazar_ag@mail.ru.